Zadanie 4b

Zadanie:
Zbadaj różniczkowalność funkcji:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\, dla\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0\, dla\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Rozwiązanie:

Sprawdźmy pochodne cząstkowe funkcji.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(x^2+y^2)(2yx+y^2)-(x^2y+xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2yx^3+x^2y^2+2xy^3+y^4-2x^3y-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=$$
$$=\frac{2xy^3+y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2(y^2-x^2+2xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(x^2+y^2)(x^2+2xy)-(x^2y+xy^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+2x^3y+x^2y^2+2xy^3-2x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}=$$
$$=\frac{x^4+2x^3y-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2-y^2+2xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

Obie pochodne istnieją i są ciągłe w $R^2 \setminus (0,0)$. Zatem funkcja f w $R^2 \setminus (0,0)$ jest różniczkowalna.
Obliczmy teraz pochodne cząstkowe z definicji w punkcie (0,0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0\cdot(\Delta x+0)}{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{(\Delta x)^3}=0$$

(Na końcu nie wychodzi symbol nieoznaczony [0/0], dlatego że licznik nie zmierza do zera tylko jest równy 0 dla każdego Δx.)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot\Delta y\cdot(0+\Delta y)}{(0^2+\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{(\Delta y)^3}=0$$

Pochodne istnieją w (0,0), ale by sprawdzić czy są ciągłe, musimy obliczyć czy ich granice przy $(x,y)\to(0,0)$ są równe wartościom w (0,0).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2(y^2-x^2+2xy)}{(x^2+y^2)^2} = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{vmatrix} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin^2\varphi\,(r^2\sin^2\varphi - r^2\cos^2\varphi + 2r^2\sin\varphi\cos\varphi)}{(r^2)^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\sin^2\varphi\,(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi)}{r^4} = \lim_{r\to 0} \sin^2\varphi\,(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi)$$

Granica ta nie istnieje, ponieważ zależy od kąta - np. dla $\varphi = \pi/2$ jest równa 1, a dla $\varphi = 0$ jest równa 0.
Zatem pochodne cząstkowe istnieją w (0,0), ale przynajmniej jedna z nich nie jest ciągła. Nie jesteśmy w stanie w ten sposób stwierdzić czy funkcja jest różniczkowalna w (0,0).
Spróbujmy z definicji:

$$f((0,0)+h) - f(0,0) = L_{x_0}(h) + r(x_0, h)$$

Niech $h = (h_1, h_2)$.

$$f((0,0)+h) - f(0,0) = f(h_1,h_2) - 0 = f(h_1,h_2) = \frac{h_1h_2(h_1+h_2)}{h_1^2+h_2^2} = \frac{h_1^2h_2+h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{h_1^2h_2+h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1^2h_2+h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^2} = \begin{vmatrix} h_1 = r\cos\varphi \\ h_2 = r\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\sin\varphi\cos\varphi\,(\sin\varphi + \cos\varphi)}{(r^2)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,(\sin\varphi+\cos\varphi)}{r}$$

Granica zależy od kąta - np. dla $\varphi = 0$ jest równa 0, a dla $\varphi = \pi/4$ - $\pm\infty$. Zatem granica nie istnieje, a funkcja f nie jest różniczkowalna w (0,0).

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w $R^2 \setminus (0,0)$.