Zadanie 3a

Zadanie:
Zbadaj różniczkowalność funkcji:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Rozwiązanie:

Sprawdźmy pochodne cząstkowe funkcji.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Obie pochodne istnieją i są ciągłe w $R^2 \setminus (0,0)$. Zatem funkcja f w $R^2 \setminus (0,0)$ jest różniczkowalna.
Obliczmy teraz pochodne cząstkowe z definicji w punkcie (0,0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1 & dla\ \Delta x\to 0^+\\ -1 & dla\ \Delta x\to 0^-\end{cases}\quad -\mathit{granica}$$

Skoro przynajmniej jedna pochodna cząstkowa nie istnieje w punkcie (0,0), to funkcja nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w $R^2 \setminus (0,0)$.