Równania różniczkowe drugiego rzędu

Omówimy jeszcze jeden przykład zagadnienia prowadzącego do równania pierwszego rzędu. Załóżmy, że spadochroniarz wyskoczył z samolotu na wysokości 1500 m i że spada swobodnie aż do wysokości 500 m. Zakładamy, że opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu prędkości (tak jest przy „dużych" prędkościach). Załóżmy dodatkowo, że graniczna prędkość spadania równą jest 50 m/s (chodzi o to, że przy tej prędkości siła oporu powietrza równoważy siłę ciężkości). Jak długo spadać będzie spadochroniarz do chwili otwarcia spadochronu na wysokości 500 m?

Oznaczmy wysokość nad powierzchnią Ziemi w chwili t przez $h(t)$, współczynnik proporcjonalności, który występuje w treści zadania — przez k, masę spadochroniarza przez m. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wnioskujemy, że

$$mh''(t) = -mg + k[h'(t)]^2$$

— $h'(t)$ to prędkość w chwili t, $h''(t)$ — to przyspieszenie w tym momencie. Z formalnego punktu widzenia napisane zostało równanie różniczkowe drugiego rzędu. Jeśli jednak potraktujemy prędkość h' jako niewiadomą funkcję, to okaże się ono równaniem pierwszego rzędu. Niech $x(t) = h'(t)$. Równanie, po zmianie dekoracji, wygląda tak

$$x'(t) = -g + \frac{k}{m}[x(t)]^2 \ ,$$

albo też tak

$$1 = \frac{x'(t)}{-g + \frac{k}{m}[x(t)]^2} \ .$$

Mamy więc $t + C = \int dt = \int \frac{x'(t)\,dt}{-g+\frac{k}{m}[x(t)]^2} = \int \frac{dx}{-g+\frac{k}{m}x^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \left[\frac{1}{x\sqrt{k/m}-\sqrt{g}} - \frac{1}{x\sqrt{k/m}+\sqrt{g}}\right] dt =$ $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{gk}} \ln\left|\frac{x\sqrt{k/m}-\sqrt{g}}{x\sqrt{k/m}+\sqrt{g}}\right|$. Podnosimy e do odpowiednich potęg i otrzymujemy dosyć długi wzór $e^{2t\cdot\sqrt{gk/m}} \cdot e^{2C\cdot\sqrt{gk/m}} = \pm\frac{x\sqrt{k/m}-\sqrt{g}}{x\sqrt{k/m}+\sqrt{g}}$. Oczywiście $x(0) = h'(0) = 0$ — początkowa prędkość spadania. Wobec tego $1 \cdot e^{2C\cdot\sqrt{gk/m}} = \pm\frac{0-\sqrt{g}}{0+\sqrt{g}} = \pm 1$. Stąd wynika, że $e^{2C\cdot\sqrt{gk/m}} = 1$, więc $e^{2t\cdot\sqrt{gk/m}} = -\frac{x\sqrt{k/m}-\sqrt{g}}{x\sqrt{k/m}+\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{g}-x\sqrt{k/m}}{\sqrt{g}+x\sqrt{k/m}}$. Z tej równości wyznaczamy

$$x = \sqrt{\frac{gm}{k}} \cdot \frac{1 - e^{2t\cdot\sqrt{gk/m}}}{1 + e^{2t\cdot\sqrt{gk/m}}} \ .$$

Wobec tego, że spełniona ma być równość $\lim\limits_{x\to\infty} x(t) = -50$ (spadamy, a nie wznosimy się), stwierdzamy, że $\sqrt{\frac{gm}{k}} = 50$. Dla prostoty przyjmujemy, że $g = 10\frac{m}{s^2}$. Otrzymujemy więc $\frac{m}{k} = 250$ i wobec tego

$$h'(t) = x(t) = 50\frac{1 - e^{\frac{2}{5}t}}{1 + e^{\frac{2}{5}t}} \ .$$

Teraz znajdziemy $h(t)$. Wystarczy scałkować. Mamy

$$h(t) = 50\int \frac{1-e^{\frac{2}{5}t}}{1+e^{\frac{2}{5}t}}\,dt = 50\int \left[1 - \frac{2e^{\frac{2}{5}t}}{1+e^{\frac{2}{5}t}}\right] dt = 50t - 250\int \left[\frac{d(1+e^{\frac{2}{5}t})}{1+e^{\frac{2}{5}t}}\right] =$$
$$= 50t - 250\ln(1+e^{\frac{2}{5}t}) + 250\ln 2 + 1500\,.$$

Stałą dobraliśmy tak, by $h(0) = 1500$. Szukamy takiego t, że

$$500 = h(t) = 50t - 250\ln(1+e^{\frac{2}{5}t}) + 250\ln 2 + 1500 = 250\ln\frac{e^{t/5}}{1+e^{\frac{2}{5}t}} + 1500\,,$$

co oznacza, że $\ln\frac{2e^{t/5}}{1+e^{\frac{2}{5}t}} = -4 = \ln e^{-4}$, czyli $e^{-4} = \frac{e^{t/5}}{1+e^{\frac{2}{5}t}}$, więc

$$0 = 1 + e^{\frac{2}{5}t} - 2e^4 e^{\frac{t}{5}} = \left[e^{t/5} - e^4\right]^2 + 1 - e^8\,,$$

czyli $e^{t/5} = e^4 + \sqrt{e^8-1}$, zatem $t = 5\ln\left\{e^4 + \sqrt{e^8-1}\right\} \approx 23{,}47\,\mathrm{s}$.

Tylko ostatni krok (przybliżenie) został wsparty komputerem, chociaż ja umiem te obliczenia przeprowadzić bez komputera i tablic.

Zajmiemy się równaniami różniczkowymi postaci $x''(t) + ax'(t)bx(t) = 0$, gdzie a, b oznaczają liczby (niekoniecznie rzeczywiste). Zaczniemy od prostego przykładu. Rozwiążemy równanie

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0\,.$$

Zauważmy, że $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = \left[x'(t) - 3x(t)\right]' - 2\left[x'(t) - 3x(t)\right]$. Niech $y(t) = x'(t) - 3x(t)$. Funkcja pomocnicza $y(t)$ musi spełniać równanie $y'(t) - 2y(t) = 0$. Wynika stąd, jak już wiemy, że istnieje stała c taka, że $y(t) = ce^{2t}$. Problem został sprowadzony do rozwiązania równania różniczkowego pierwszego rzędu z niewiadomą funkcją x:

$$x'(t) - 3x(t) = ce^{2t}\,.$$

Rozwiązujemy pomocnicze równanie jednorodne $x'(t) - 3x(t) = 0$. Rozwiązanie ogólne ma postać $x(t) = ke^{3t}$, gdzie k oznacza pewną liczbę. Zamiast liczby k rozważymy funkcję k zmiennej t i znajdziemy rozwiązanie w postaci $k(t)e^{3t}$. Podstawiając do równania otrzymujemy

$$ce^{2t} = \left[k(t)e^{3t}\right]' - 3k(t)e^{3t} = k'(t)e^{3t} + 3k(t)e^{3t} - 3k(t)e^{3t} = k'(t)e^{3t}\,.$$

Stąd wynika, że $k'(t) = ce^{-t}$ i w końcu $k(t) = -ce^{-t} + c_1$. Mamy więc $x(t) = [-ce^{-t} + c_1]e^{3t} =$ $= -\,ce^{2t} + c_1e^{3t}$. Wykazaliśmy więc, że każde rozwiązanie równania $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0$ może być zapisane w postaci $c_1e^{3t} + c_2e^{2t}$ (podstawiliśmy $c_2 = -c$). W wykładnikach pojawiły się pierwiastki równania charakterystycznego $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. To nie jest przypadek. Jeśli $a, b \in \mathbb{C}$ i równanie $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ma dwa różne pierwiastki λ_1, λ_2, to

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = \left[x'(t) - \lambda_1x(t)\right]' - \lambda_2\left[x'(t) - \lambda_1x(t)\right] = \left[x'(t) - \lambda_2x(t)\right]' - \lambda_1\left[x'(t) - \lambda_2x(t)\right].$$

Oznaczając $y(t) = x'(t) - \lambda_1x(t)$ otrzymujemy równanie $y'(t) - \lambda_2y(t) = 0$. Stosując procedurę zastosowaną przed chwilą w konkretnej sytuacji stwierdzamy, że istnieją takie liczby c_1, c_2, że dla każdej liczby $r \in \mathbb{R}$ zachodzi $x(t) = c_1e^{\lambda_1t} + c_2e^{\lambda_2t}$ równość. To, że funkcja tak określona jest rozwiązaniem interesującego nas równania, mogliśmy sprawdzić bezpośrednio, ale nie wiedzielibyśmy wtedy, że innych rozwiązań nie ma. Nasza metoda wykazuje, że wskazane funkcje są jedynymi rozwiązaniami tego równania.

Ogólnie będziemy się teraz zajmować równaniem postaci

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = g(t) \, , \tag{$nj2$}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ zaś g jest funkcją ciągłą o wartościach zespolonych określoną na pewnym przedziale, być może na całej prostej. Najważniejsze dla nas są te równania, w których funkcja g jest quasiwielomianem, znaczenie tego słowa zostanie ujawnione niebawem.

Z równaniem $nj2$. wiązać będziemy równanie linowe jednorodne

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \tag{$j2$}$$

oraz równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \, . \tag{$ch2$}$$

Równanie charakterystyczne $(ch2)$ ma dwa pierwiastki (niekoniecznie rzeczywiste i niekoniecznie różne) λ_1, λ_2. Dla każdej liczby λ mamy więc $\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, spełnione są też znane (kiedyś) wszystkim maturzystom wzory Viète'a: $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$, $\lambda_1\lambda_2 = b$. Z wzorów Viète'a wynika, że

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = \big(x'(t) - \lambda_2 x(t)\big)' - \lambda_1\big(x'(t) - \lambda_2 x(t)\big) \, .$$

Można sobie ułatwić manipulacje wprowadziwszy symbol D, oznaczający różniczkowanie, umawiając się, że dla każdej funkcji f symbol Df oznacza pochodną funkcji f, tzn.

$$Df(t) = f'(t) \, .$$

Wtedy spełnione są następujące równości:

$$D(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 Df_1 + c_2 Df_2 \qquad \text{(liniowość różniczkowania)},$$

$$D(f_1 \cdot f_2) = Df_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot Df_2 \qquad \text{(pochodna iloczynu)}.$$

Będziemy też pisać $D^2 f$ zamiast $D(Df)$. Przy takich umowach równanie $(nj2)$ można zapisać tak $D^2x + aDx + bx = g$, opuściliśmy argument, co wielokrotnie będziemy robić, bo to upraszcza zapis, choć zmusza do pamiętania, które symbole oznaczają liczby, a które — funkcje. Jeśli jeszcze umówimy się, że $(D + \lambda)x = Dx + \lambda x$ dla każdej liczby λ i każdej funkcji różniczkowalnej x, to możemy napisać

$$x'' + ax' + bx = D^2x + aDx + bx = (D - \lambda_1)\big(Dx - \lambda_2 x\big) = (D - \lambda_1)\big((D - \lambda_2)x\big) \, .$$

Naturalnym pomysłem jest więc pisanie $x'' + ax' + bx = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x$, co zwykle się czyni. Nasze równanie ma więc postać

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x = g \, .$$

Niech $z = (D - \lambda_2)x$. Rozwiązanie równania drugiego rzędu $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x = g$ można więc sprowadzić do rozwiązania dwóch równań pierwszego rzędu: najpierw szukamy funkcji z takiej, że $(D - \lambda_1)z = g$ a po znalezieniu z szukamy funkcji x takiej, że $(D - \lambda_2)x = z$.

Zauważmy jeszcze, że jeśli $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x_1 = g$ i $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x_2 = g$, to różnica $x_1 - x_2$ rozwiązań równania niejednorodnego, spełnia równanie jednorodne $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)(x_1 - x_2) = 0$. Jasne jest, że jeśli $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = g$ i $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = 0$, to $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)(x+y) = g$. Oznacza to, że jeśli znajdziemy w jakiś sposób **jedno** rozwiązanie równania niejednorodnego* i wszystkie rozwiązania równania jednorodnego, to tym samym znajdziemy wszystkie rozwiązania równania niejednorodnego.

Ostrzeżenie:
$(D+1)(D-t)x = (D+1)(x'-tx) = x'' - (tx)' + x' - tx = x'' + (1-t)x' - (1+t)x$, ale
$(D-t)(D+1)x = (D-t)(x'+x) = x'' + x' - tx' - tx = x'' + (1-t)x' - tx$, zatem

$$(D+1)(D-t)x \neq (D-t)(D+1)x.$$

Widzimy więc, że kolejność wykonywania operacji ma wpływ na wynik. W tym konkretnym przypadku można się tego spodziewać bez przed przeprowadzaniem obliczeń, bo pochodną funkcji stałej jest 0, a $(t)' = 1 \neq 0$.
Jednak jeśli λ_1, λ_2 są **liczbami** (najprostszy przypadek, innych z braku czasu nie rozważamy), to

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2) = (D-\lambda_2)(D-\lambda_1). \quad \blacksquare$$

Przykład 1.
Zajmiemy się równaniem oscylatora harmonicznego, na razie bez tłumienia i wymuszenia, czyli równaniem $x'' + \omega^2 x = 0$. Można je zapisać w postaci $0 = (D^2 + \omega^2)x = (D + \omega i)(D - \omega i)x$. Niech $z = (D - \omega i)x$. Ma więc być $(D + \omega i)z = 0$, czyli $z(t) = \tilde{c}_1 e^{-\omega i t}$, gdzie $\tilde{c}_1$ oznacza dowolną liczbę zespoloną. Teraz kolej na równanie $(D - \omega i)x = \tilde{c}_1 e^{-\omega i t}$. Z tego, co wiemy o równaniach pierwszego rzędu, wynika, że jeśli $\omega \neq 0$, to $x(t) = c_1 e^{-\omega i t} + c_2 e^{\omega i t}$, gdzie c_1 jest stałą odpowiednio dobraną do $\tilde{c}_1$: $(D - \omega i)\big(c_1 e^{-\omega i t} + c_2 e^{\omega i t}\big) = -2\omega i c_1 e^{-\omega i t}$, więc musi być spełniona równość $\tilde{c}_1 = -2\omega i c_1$, albo $c_1 = -\frac{\tilde{c}_1}{2\omega i} = \frac{\tilde{c}_1}{2\omega} i$.

Otrzymaliśmy rozwiązanie w postaci zespolonej. Można je zapisać w postaci rzeczywistej. Niech $c_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $c_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, gdzie $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$x(t) = c_1 e^{-\omega i t} + c_2 e^{\omega i t} = \big[\alpha_1 + \beta_1 i\big]\big[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\big] + \big[\alpha_2 + \beta_2 i\big]\big[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big] =$$
$$= \big[(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\omega t) + (\beta_1 - \beta_2)\sin(\omega t)\big] + i\big[(\beta_1+\beta_2)\sin(\omega t) - (\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\omega t)\big].$$

Jeśli $\omega \in \mathbb{R}$, to z tego, że funkcja x jest rozwiązaniem równania $x'' + \omega^2 x = 0$ wynika, że $0 = \overline{0} = \overline{x'' + \omega^2 x} = \overline{x''} + \overline{\omega^2 x} = \bar{x}'' + \bar{\omega}^2 \bar{x}$, więc również funkcja $\bar{x}$ jest rozwiązaniem. Wobec tego, że suma rozwiązań też jest rozwiązaniem, stwierdzamy, że funkcje $x + \bar{x}$ i $\frac{1}{2}(x + \bar{x}) = \mathrm{Re}x$ są rozwiązaniami równania. Również funkcja $\mathrm{Im}x = \frac{1}{2i}(x - \bar{x})$ jest rozwiązaniem. Ponieważ
$\mathrm{Re}x(t) = (\alpha_1+\alpha_2)\cos(\omega t) + (\beta_1 - \beta_2)\sin(\omega t)$ oraz $\mathrm{Im}x(t) = (\beta_1+\beta_2)\sin(\omega t) - (\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\omega t)$, więc rozwiązania rzeczywiste wyglądają tak:

$$d_1\cos(\omega t) + d_2\sin(\omega t),$$

gdzie d_1, d_2 oznaczają dowolne liczby rzeczywiste.

* np. zgadniemy!

Mamy $x(0) = d_1$ i $x'(0) = \omega d_2$. Wobec tego d_1 to położenie w chwili $t = 0$, a w d_2 zakodowana jest prędkość początkowa. Fizycy na ogół wolą inne parametry: amplitudę i fazę. Niech $A = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ i niech θ będzie takim kątem, że $\cos\theta = \frac{d_1}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}}$ oraz $\sin\theta = -\frac{d_2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}}$. Wtedy zachodzi równość

$$x(t) = d_1\cos(\omega t) + d_2\sin(\omega t) = A\big[\cos\theta\cos(\omega t) - \sin\theta\sin(\omega t)\big] = A\cos(\theta + \omega t)\,.$$

Jest jasne jak przechodzić od zestawu parametrów d_1, d_2 do zestawu A, θ i odwrotnie. Można więc od razu szukać rozwiązania w postaci $A\cos(\theta + \omega t)$ jednak opis ogólnej teorii w tych terminach jest bardziej skomplikowany i do tego mniej ogólny, więc używamy funkcji wykładniczych i liczb zespolonych. ■

Okazuje się, że w elementarnych zastosowaniach najczęściej funkcja g ma dosyć szczególną postać. Wyjaśnimy teraz sens użytego już wcześniej obcego słowa.

Definicja quasiwielomianu

Iloczyn wielomianu p i funkcji $e^{\lambda t}$ nazywamy quasiwielomianem z wykładnikiem λ. Stopniem quasiwielomianu $p(t)e^{\lambda t}$ nazywamy stopień wielomianu p. ■

Funkcja $(t^2 + 13t + 12)e^{7t}$ jest quasiwielomianem stopnia drugiego z wykładnikiem $\lambda = 7$. Funkcja e^{-5t} jest quasiwielomianem stopnia 0 wykładnikiem -5. Funkcja $x^3 - 4x^3 + 2$ jest quasiwielomianem stopnia 3 z wykładnikiem 0, czyli wielomianem. Funkcja $t^3cos(2t)$ nie jest quasiwielomianem, ale jest częścią rzeczywistą quasiwielomianu $t^3e^{2it} = t^3\big(\cos(2t) + i\sin(2t)\big)$. Podobnie funkcja

$(t^3+2t)\sin(3t)e^{-2t}$ nie jest quasiwielomianem, ale jest częścią urojoną quasiwielomianu stopnia 3 z wykładnikiem $-2+3i$, mianowicie $(t^3+2t)e^{(-2+3it)} = (t^3+2t)e^{-2t}\big(\cos(3t)+i\sin(3t)\big)$. Wykażemy teraz twierdzenie opisujące rozwiązania równania niejednorodnego pierwszego rzędu, którego prawa strona jest quasiwielomianem.

Twierdzenie o rozwiązaniach równania liniowego quasiwielomianowego rzędu 1.

Jeśli funkcja g jest quasiwielomianem stopnia d z wykładnikiem λ i $x'(t) = kx(t) + g(t)$, to jeśli $k \neq \lambda$, to funkcja x jest sumą quasiwielomianu stopnia d z wykładnikiem λ i quasiwielomianu stopnia ≤ 0 z wykładnikiem k; jeśli $k = \lambda$, to funkcja x jest quasiwielomianem stopnia $d+1$ z wykładnikiem λ.

Dowód.

Zastosujemy metodę uzmienniania stałej. Rozwiązaniem pomocniczego równania liniowego jednorodnego $y'(t) = ky(t)$ jest $y(t) = ce^{kt}$, c jest tu pewną liczbą. Znajdziemy funkcję c zmiennej t taką, że $x(t) = c(t)e^{kt}$. Podstawiamy do równania: $c'(t)e^{kt} + kc(t)e^{kt} = kc(t)e^{kt} + g(t)$. Stąd $c'(t)e^{kt} = g(t)$, więc $c'(t) = g(t)e^{-kt}$. Niech p będzie wielomianem stopnia d takim, że $g(t) = p(t)e^{\lambda t}$. Jeśli $\lambda = k$, to $c'(t) = p(t)$, zatem c jest wielomianem stopnia $d+1$ i w tym przypadku dowód jest zakończony. Załóżmy więc, że $\lambda \neq k$. Teraz $c'(t) = p(t)e^{(\lambda-k)t}$. Całkując przez części otrzymujemy $\int p(t)e^{(\lambda-k)t}\,dt = \frac{1}{\lambda-k}p(t)e^{(\lambda-k)t} - \frac{1}{\lambda-k}\int p'(t)e^{(\lambda-k)t}\,dt$. Sprowadziliśmy obliczenie całki do takiego samego problemu, ale z wielomianem, którego stopień jest o 1 mniejszy od wyjściowego. Można tę procedurę powtórzyć: $\int p'(t)e^{(\lambda-k)t}\,dt = \frac{1}{\lambda-k}p'(t)e^{(\lambda-k)t} - -\frac{1}{\lambda-k}\int p''(t)e^{(\lambda-k)t}\,dt$, zatem

$$\int p(t)e^{(\lambda-k)t}\,dt = \int \frac{1}{\lambda-k}p(t)e^{(\lambda-k)t}\,dt - \frac{1}{\lambda-k}\int p'(t)e^{(\lambda-k)t}\,dt + \frac{1}{(\lambda-k)^2}\int p''(t)e^{(\lambda-k)t}\,dt\,.$$

Widać, że całkując $d+1$ razy otrzymamy w końcu quasiwielomian stopnia d z wykładnikiem $\lambda-k$, a po pomnożeniu przez e^{kt} — quasiwielomian z wykładnikiem λ stopnia d, plus stała pomnożona przez e^{kt}, więc wynik zapowiedziany w twierdzeniu. ■

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $x'(t) = -5x(t) + (t^2+4t)e^{3t}$. Ponieważ funkcja $(t^2+4t)e^{3t}$ jest quasiwielomianem stopnia 2 z wykładnikiem $3 \neq -5$, więc rozwiązanie jest quasiwielomianem stopnia 2 z wykładnikiem 3 plus stała razy e^{-5t}, czyli funkcją postaci $\big(c_1t^2+c_2t+c_3\big)e^{3t}+ce^{-5t}$. Należy znaleźć stałe c_1, c_2, c_3, c. Podstawiając do równania otrzymujemy

$\big(2c_1t+c_2\big)e^{3t} + 3\big(c_1t^2+c_2t+c_3\big)e^{3t} - 5ce^{-5t} = -5\big(c_1t^2+c_2t+c_3\big)e^{3t} - 5ce^{-5t} + (t^2+4t)e^{3t}$.

Aby te funkcje były równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej t po obu stronach równości muszą być równe. Wobec tego $3c_1 = -5c_1+1$, $2c_1+3c_2 = -5c_2+4$, $c_2+3c_3 = -5c_3$ i $-5c = -5c$. Ostatnia równość nic nie wnosi: liczba c to dowolna liczba zespolona.♠ Rozwiązujemy układ 3 równań liniowych z niewiadomymi c_1, c_2, c_3 i otrzymujemy $c_1 = \frac{1}{8}$, $c_2 = \frac{15}{32}$ i $c_3 = -\frac{15}{256}$. Wykazaliśmy, że $x(t) = \big(\frac{1}{8}t^2 + \frac{15}{32}t - \frac{15}{256}\big)e^{3t} + ce^{-5t}$. ■

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $x'(t) = 2x(t) + t^2e^{2t}$. Z twierdzenia wynika, że w tym przypadku rozwiązanie jest quasiwielomianem stopnia $2+1$ z wykładnikiem 2. Jest więc postaci $\big(c_1t^3+c_2t^2+c_3t+c_4\big)e^{2t}$. Podstawiając otrzymujemy

$$\big(3c_1t^2+2c_2t+c_3\big)e^{2t} + 2\big(c_1t^3+c_2t^2+c_3t+c_4\big)e^{2t} = 2\big(c_1t^3+c_2t^2+c_3t+c_4\big)e^{2t} + t^2e^{2t}.$$

Stąd wynika natychmiast (porównujemy współczynniki przy tych samych potęgach t po obu stronach równości), że $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = c_3 = 0$ oraz, że c_4 jest dowolną liczbą (por. notka na dole strony). Rozwiązaniem jest więc $\frac{1}{3}t^3e^{2t} + c_4e^{2t}$, c_4 oznacza tu dowolną liczbę zespoloną. ■

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $x'(t) = -2x(t) + te^t\sin(3t)$. Tym razem prawa strona nie jest quasiwielomianem, ale $te^t\sin(3t) = \operatorname{Im}(te^{(1+3i)t}$, więc najpierw rozwiążemy równanie $x'(t) = -2x(t) + te^{(1+3i)t}$, a potem zainteresujemy się jego częścią urojoną. Ponieważ $-2 \neq 1+3i$, więc rozwiązanie jest postaci $(c_1t+c_2)e^{(1+3i)t} + ce^{-2t}$. Podstawiamy do równania i otrzymujemy

$$c_1e^{(1+3i)t} + (1+3i)(c_1t+c_2)e^{(1+3i)t} - 2ce^{-2t} = -2(c_1t+c_2)e^{(1+3i)t} - 2ce^{-2t} + te^{(1+3i)t}.$$

Porównanie współczynników przy odpowiednich funkcjach po obu stronach prowadzi do równań $(1+3i)c_1 = -2c_1+1$ i $c_1 + (1+3i)c_2 = -2c_2$. Stąd $c_1 = \frac{1}{3+3i} = \frac{1-i}{6}$, $c_2 = \frac{-c_1}{3+3i} = \frac{-1}{(3+3i)^2} = \frac{-1}{18i} = \frac{i}{18}$. Oczywiście żadnego warunku na c nie otrzymaliśmy, więc rozwiązanie zespolone ma postać $(\frac{1-i}{6}t + \frac{i}{18})e^{(1+3i)t} + ce^{-2t}$. Jego część urojona to $\frac{1-3t}{18}e^t\cos(3t) + \frac{1}{6}te^t\sin(3t) + \operatorname{Im}c\cdot e^{-2t}$.

♠ To zresztą było jasne od samego początku, bo funkcja ce^{-5t} jest rozwiązaniem równania jednorodnego, więc można ją dodać do rozwiązania równania niejednorodnego i otrzymać następne rozwiązanie równania niejednorodnego.

Znaleźliśmy więc rozwiązanie ogólne równania $x'(t) = -2x(t) + te^t \sin(3t)$, $\operatorname{Im} c$ to prostu dziwaczne oznaczenie dowolnej liczby rzeczywistej. ■

Wiedząc jak rozwiązywać te bardzo szczególne równania pierwszego rzędu możemy zająć się równaniami drugiego rzędu. Jest jasne, że w przypadku równania drugiego rzędu prawdziwe jest

Twierdzenia o rozwiązaniach równania liniowego drugiego rzędu

Niech $a, b \in \mathbb{C}$ i niech w oznacza dowolny wielomian o być może nierzeczywistych współczynnikach. Równanie $x'' + ax' + bx = w(t)e^{\lambda t}$ ma rozwiązanie, które jest quasiwielomianem o wykładniku λ, przy czym jeśli λ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to stopień rozwiązania równy jest stopniowi $w(t)$, jeśli λ jest pierwiastkiem jednokrotnym, to stopień rozwiązania jest o 1 większy od stopnia $w(t)$, jeśli λ jest pierwiastkiem dwukrotnym, to stopień rozwiązania jest o 2 większy od stopnia $w(t)$. ■

Studenci bez trudu uogólnią to twierdzenie na przypadek równań wyższego rzędu o stałych współczynnikach, których prawa strona jest quasiwielomianem $w(t)e^{\lambda t}$. Stopień rozwiązania szczególnego jest większy od stopnia $w(t)$ o krotność λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego lewej strony.

Przykład 5.

Znajdziemy rozwiązania równania $x'' + x = 2\cos t + 12t \sin t$.

Tym razem prawa strona nie jest quasiwielomianem, ale $2\cos t = \operatorname{Re}\big(2e^{it}\big)$ i $12t \sin t = \operatorname{Im} 12\big(e^{it}\big)$. Zajmiemy się równaniami pomocniczymi $x'' + x = 2e^{it}$ oraz $x'' + x = 12te^{it}$. W obu przypadkach równanie charakterystyczne równania jednorodnego to $\lambda^2 + 1 = 0$. Ma ono dwa pierwiastki i oraz $-i$. Wobec tego jednym z rozwiązań równania $x'' + x = 2e^{it}$ jest quasiwielomian stopnia pierwszego, a równania $x'' + x = 12te^{it}$ — quasiwielomian stopnia drugiego .

W pierwszym przypadku powinien więc być spełniony wzór

$$2e^{it} = \big((At + B)e^{it}\big)'' + (At + B)e^{it} = 2Aie^{it} + i^2(At + B)e^{it} + (At + B)e^{it} = 2Aie^{it}.$$

Stąd wynika, że $A = -i$. B może być dowolne. Znaleźliśmy rozwiązanie ogólne pierwszego równania

$$-ite^{it} + c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}.$$

W drugim przypadku musi zachodzić równość

$$12te^{it} = \big((At^2 + Bt + C)e^{it}\big)'' + (At^2 + Bt + C)e^{it} =$$
$$= 2Ae^{it} + 2i(2At + B)e^{it} + i^2(At^2 + Bt + C)e^{it} + (At^2 + Bt + C)e^{it} = 4Aite^{it} + (2A + 2Bi)e^{it}.$$

Wynika stąd, że $A = -3i$ oraz $B = 3$. C może być dowolne. Rozwiązaniem ogólnym drugiego równania jest

$$-3it^2e^{it} + 3te^{it} + c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}.$$

Rozwiązaniem ogólnym równania $x'' + x = 2\cos t$ jest funkcja $t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Ma to być rozwiązanie rzeczywiste, zatem tym razem stałe c_1, c_2 muszą być rzeczywiste.

Rzeczywistym rozwiązaniem ogólnym równania $x'' + x = 12t \sin t$ jest funkcja

$$\operatorname{Im}\big(-3it^2e^{it} + 3te^{it}\big) + c_1 \cos t + c_2 \sin t = -3t^2 \cos t + 3t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Znów zainteresowani jesteśmy rozwiązaniem rzeczywistym, zatem i w tym przypadku $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Pokażemy teraz jak można uzmienniać stałe (obie na raz!) w przypadku równania drugiego rzędu. Użyjemy ostatnio rozwiązanego równania, ale podkreślić należy, że jedną z głównych przyczyn, dla których to robimy jest to, że ta metoda daje się stosować również wtedy, gdy funkcja g (prawa strona równania) nie jest quasiwielomianem.

Przykład 5'.

Znajdziemy rozwiązania równania $x'' + x = 2\cos t + 12t\sin t$. Pomocnicze równanie jednorodne wygląda tak $y'' + y = 0$. Jego rozwiązaniem ogólnym jest funkcja $c_1\cos t + c_2\sin t$ — stosujemy tym razem rzeczywistą postać, by dać odetchnąć osobom, które jeszcze nie zdążyły polubić liczb zespolonych. Będziemy szukać rozwiązania równania niejednorodnego w postaci $c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$, gdzie c_1, c_2 oznaczają teraz niewiadome funkcje. Mamy

$$\big[c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t\big]' = c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t - c_1(t)\sin t + c_2(t)\cos t.$$

Jeśli obliczymy drugą pochodną, to pojawią się $c_1''(t)$ i $c_2''(t)$, co może spowodować jakieś kłopoty. Przyjmiemy więc, że $c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0$ dla każdego t — dodajemy sztucznie równość, ale mamy dwie niewiadome funkcje c_1, c_2, więc dwa równania nas przerazić nie powinny. Uwzględniając tę sztucznie dodaną równość przy zastępowaniu $x(t)$ przez $c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$ w równaniu $x'' + x = 2\cos t + 12t\sin t$ otrzymujemy

$$2\cos t + 12t\sin t = -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t - c_1(t)\cos t - c_2(t)\sin t + c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t =$$
$$= -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t.$$

Otrzymaliśmy więc układ równań

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0, \\ -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = 2\cos t + 12t\sin t. \end{cases}$$

Niech $W(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t - (-\sin^2 t) = 1 \neq 0$, zatem otrzymany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie: $c_1'(t) = \begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ 2\cos t + 12t\sin t & \cos t \end{vmatrix} = -2\sin t\cos t - 12t\sin^2 t$, $c_2'(t) = {}$ $= \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & 2\cos t + 12t\sin t \end{vmatrix} = 2\cos^2 t + 12t\sin t\cos t$. Całkując i upraszczając nieco otrzymujemy $c_1(t) = 4\cos^2 t + 6t\sin t\cos t - 3t^2 + d_1$ i $c_2(t) = 4t + 4\sin t\cos t - 6t\cos^2 t + d_2$, co pozwala napisać wynik $x(t) = -3t^2\cos t + 4t\sin t + (d_1 + 4)\cos t + d_2\sin t$. Widać więc, że wynik na pierwszy rzut oka jest nieco inny niż poprzednio otrzymany, ale ta różnica jest kosmetyczna: zamiast $d_1 + 4$ w poprzednim wyniku jest c_1, co oczywiście nie ma na nic wpływu, bo obie stałe są dowolnymi liczbami zespolonymi. ■

Jeśli f, g są funkcjami różniczkowalnymi, to wyznacznik $\begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$ nazywany jest ich wyznacznikiem Wrońskiego.*. Dla trzech funkcji f, g, h wyznacznik definiowany jest tak $\begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \end{vmatrix}$ itd. Z naszego punktu widzenia jest on o tyle istotny, że jeśli wybieramy dwa rozwiązania x_1, x_2 jednorodnego liniowego różniczkowego równania drugiego rzędu, niekoniecznie o stałych współczynnikach i ich wyznacznik Wrońskiego (ang: wronskian) jest różny od 0, to dla każdego rozwiązania x tego równania jednorodnego istnieją **stałe** c_1, c_2 takie, że $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, zaś każde rozwiązanie równania niejednorodnego z tą samą prawą stroną może być znalezione w postaci $c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$, gdzie c_1, c_2 są odpowiednio dobranymi funkcjami (jak w przykładzie $5'$ powyżej).

Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności dla równania drugiego rzędu

Jeśli

(i) funkcja $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła,

(ii) dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x, y, \ )$, czyli funkcja przypisująca liczbie z liczbę $f(x, y, z)$ jest różniczkowalna, jej pochodna $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ jest ciągła,

(iii) dla dowolnych $x, z \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x, \ , z)$, czyli funkcja przypisująca liczbie y liczbę $f(x, y, z)$ jest różniczkowalna, jej pochodna $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ jest ciągła,

to istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, że dla każdej liczby $\delta \in (0, \delta_0)$ istnieje dokładnie jedna funkcja $\gamma\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^2$ taka, że $\gamma''(x) = f(x, \gamma(x), \gamma'(x))$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\gamma(x_0) = y_0$ oraz $\gamma'(x_0) = z_0$. $\boxtimes$

O tym twierdzeniu należy myśleć tak: jeśli w równaniu $x'' = f(t, x, x')$ funkcja f jest porządna i znane jest położenie początkowe i prędkość początkowa, to znana jest zarówno przeszłość jak i przyszłość poruszającego się obiektu (mówimy tu mając na myśli ruch, ale można użyć innej terminologii związanej z procesem innego rodzaju). Tego rodzaju twierdzenia wbrew pozorom mają ogromne znaczenie praktyczne choć nie podają żadnej metody znajdowania rozwiązania. Pozwalają jednak stosować nie do końca formalne rozumowania i jeśli uda się znaleźć jakieś rozwiązanie, to na stwierdzenie, że innych rozwiązań już nie ma. Przykładowa sytuacja (modelowa): szukamy rozwiązania w jakiejś postaci, np. quasiwielomianu, znajdujemy i skąd wiadomo, że innych nie ma? Twierdzenie o istnieniu i **jednoznaczności** daje odpowiedź.

W przypadku równań wyższych rzędów analogiczne twierdzenie też jest prawdziwe. Różni się tym tylko, że warunek początkowy obejmuje więcej pochodnych (wszystkie aż do przedostatniej).

W przypadku liniowych jednorodnych równań wyższego rzędu o stałych współczynnikach działa ta sama zasada, którą opisaliśmy dla równań drugiego rzędu. Stanie się to wszystko jasne po rozwiązaniu pewnej liczby zadań.

Zadanka

1. Rozwiązać równania

* jedna z ulic w Warszawie nosi imię hr. Józefa Marii Hoëhnè-Wrońskiego

a. $x'' - 2x' - 3x = e^{4t}$;

b. $x'' - 2x = 2e^t - t^2$;

c. $x'' - 5x' + 4x = 4t^2 e^{2t}$;

d. $x'' - 6x' + 9x = t^2 e^{3t}$;

e. $x'' - 5x' + 4x = 4t^2 e^t$;

f. $x'' + 2x' - 3x = t^2 e^t$;

g. $x'' + x = 4t \sin t$;

h. $x'' - 2x' + x = 0$, $x(2) = 1$, $x'(2) = -2$;

i. $x'' + x = 4te^t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = -3$;

i. $x'' + 2x' + 2x = te^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

2. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

1° $x'' - 6x' + 4x = 0$; 2° $x'' - 8x' + 16x = 0$; 3° $x'' - 6x' + 4 = 0$;

4° $x'' - 6x' + 13x = 0$; 5° $x^{(3)} - 6x'' + 11x' - 6x = 0$; 6° $x^{(3)} - x = 0$;

7° $x^{(4)} - 6x'' + 4x = 0$; 8° $x^{(4)} - 2x'' + x = 0$; 9° $x^{(4)} - 4x^{(3)} + 6x'' - 4x' + x = 0$;

10° $x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x'' - 2x' + x = 0$; 11° $x^{(4)} - 6x'' + 4x = 0$;

3. Rozwiązać równanie

1° $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t}$ 2° $x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{e^t+1}$

3° $x'' + x = \frac{1}{\sin t}$ 4° $x'' + 4x = 2 \operatorname{tg} t$

5° $x'' + 2x' + x = 3e^{-t}\sqrt{1+t}$ 6° $x'' + x = \frac{1}{\cos^3 t}$

7° $x'' - 2x' + x = e^t$ 8° $x'' + 3x' + 2x = te^t + t^2 e^{-t} + e^{3t}$

9° $x'' + x = \sin t + t \cos 2t$ 10° $x'' + 4x = \cos 2t + e^{-4t}$

11° $x'' + 2x' + x = 3t^2 e^{-t}$ 12° $x'' + x = \sin t + t \sin 2t + t^2 \cos t$.

13° $x^{(4)} - 4x^{(3)} + 16x' - 16x = te^{-2t}$. 14° $x^{(4)} + 4x^{(3)} + 8x'' + 8x' + 4x = e^{-t} \cos t$.

15° $x^{(6)} + 12x^{(4)} + 48x'' + 64x = 2\cos^2 t$. 16° $x^{(6)} - 12x^{(4)} + 48x'' - 64x = 2\sin^2 t$.