Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

I.Newton sformułował podstawowe zasady dynamiki. Druga zasada dynamiki ma postać wzoru

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}\,.$$

$\mathbf{F}$ oznacza tu siłę działającą na ciało o masie m, $\mathbf{a}$ oznacza przyspieszenie tego ciała. Przyspieszenie to druga pochodna położenia w chwili t, oczywiście przyspieszenie na ogół zależy od czasu. Jest to oczywiście wielkość wektorowa, więc dlatego stosujemy „tłusty” druk albo strzałkę (to rzecz gustu). Oznaczając położenie w chwili t przez
$\mathbf{x}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)$ otrzymujemy $\mathbf{a}(t) = \mathbf{x}''(t)$. W ogólności siła jest wektorem zależnym od położenia (np. grawitacyjna), prędkości poruszającego się ciała (np. tarcie) i czasu (np. zwiększamy lub zmniejszamy obroty silnika). Powinniśmy więc traktować wektor $\mathbf{F}$ jako funkcję zależną od zmiennych $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ oraz t. Wtedy druga zasada dynamiki przyjmuje postać

$$\mathrm{F}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t\big) = m\mathbf{x}''(t)\,.$$

Z jednej strony występuje druga pochodna funkcji $\mathbf{x}$, a z drugiej funkcja zależna od $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ oraz t. Zwykle naszym celem po napisaniu takiego równania jest znalezienie funkcji $\mathbf{x}$ — chcemy zbadać ruch, czyli móc powiedzieć w jakim punkcie w danej chwili znajduje się poruszający się obiekt.

Równania tego typu nazywane są *równaniami różniczkowymi*, w tym konkretnym przypadku drugiego rzędu, bowiem w równaniu występują pochodne drugiego rzędu niewiadomej funkcji, a pochodne wyższego rzędu już nie.

Jeśli równanie nie daje się rozwiązać, to możemy próbować przybliżyć rozwiązanie, czasem przybliżyć równanie i rozwiązać równanie przybliżone w nadziei, że jego rozwiązania przybliżają rozwiązania wyjściowego równania. Zagadnienia te są trudne. W trakcie tego wykładu zajmować się będziemy jedynie najprostszymi typami równań różniczkowych, które można rozwiązać.

W szkole uczniowie spotykają się na lekcjach fizyki z wahadłem matematycznym, poznają prawa jego ruchu. Zaczyna się to wszystko od stwierdzenia, że jeśli $x(t)$ oznacza kąt o jaki wahadło odchylone jest od pionu w chwili t, to spełniona jest równość $x''(t) = -\sin x(t)$. Zakładam tu, że jednostki są tak dobrane, że przyspieszenie ziemskie równe jest 1, długość wahadła też jest 1 i dlatego nie ma żadnych współczynników w rodzaju g, l, $\ldots$ Następnie nauczyciel oświadcza, że ponieważ zajmujemy się jedynie sytuacją, w której amplituda wahań jest mała, więc możemy przyjąć, że $\sin x \approx x$*, co pozwala na zajęcie się równaniem $x''(t) = -x(t)$. To ostatnie daje się łatwo rozwiązać, nauczymy się tego w nieodległej przyszłości.

Można równanie $x''(t) = -\sin x(t)$ pomnożyć stronami przez $x'(t)$, w wyniku otrzymamy $x''(t)x'(t) = -x'(t)\sin x(t)$. Korzystając z wzoru na pochodną złożenia możemy napisać równość

* Jeśli f jest funkcją różniczkowalną w punkcie p, to zachodzi równość przybliżona $f(p+h)\approx f(p)+f'(p)h$, tę przybliżoną równość stosujemy tu dla $f(x)=\sin x$, $p=0$. Zastępujemy więc funkcję sinus funkcją liniową.

$\frac{1}{2}\big(\big[x'(t)\big]^2\big)' = \big(\cos x(t)\big)'$. Wynika stąd, że funkcja $\frac{1}{2}\big[x'(t)\big]^2 - \cos x(t)$ jest stała. Fizycy tę funkcję zwykli nazywać energią i dodając, że $\frac{1}{2}\big[x'(t)\big]^2$ to energia kinetyczna, a $-\cos x(t)$ to energia potencjalna. Nie ma więc nic dziwnego w tym, że suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała. Oznaczmy tę stałą przez h. Może ona przyjmować różne wartości, jednak nie mogą one być mniejsze niż -1. Jeśli $\frac{1}{2}\big[x'(t)\big]^2 - \cos x(t) = -1$, to musi być $x'(t) = 0$ i $cosx(t) = 1$ dla każdej liczby t. Odpowiada to temu, że wahadło znajduje się w swym najniższym położeniu i nie porusza się. Zajmiemy się inną ciekawą z punktu widzenia autora tekstu wartością h, mianowicie przyjmiemy, że $h = 1$. Nasze równanie ma więc teraz postać:

$$\frac{1}{2}\big[x'(t)\big]^2 - \cos x(t) = 1$$

Nie jest trudno odgadnąć jedno z rozwiązań. Funkcja stała $x(t) = \pi$ spełnia to równanie. Rozwiązanie to odpowiada temu, że wahadło znajduje się bez ruchu w swych **górnym** położeniu. Oczywiście tego rodzaju bezruch jest bardzo niestabilny i trudno go zrealizować w praktyce. Przepiszmy równanie w postaci $x'(t) = \pm\sqrt{2(1+\cos x(t))} = \pm\sqrt{4\cos^2\frac{x(t)}{2}} = \pm 2\cos\frac{x(t)}{2}$. Zajmiemy się równaniem $x'(t) = 2\sin\frac{x(t)}{2}$. Przepiszemy je w postaci

$$1 = \frac{x'(t)}{2\cos\frac{x(t)}{2}}\ .$$

Całkując obie strony otrzymujemy

$$\begin{aligned} t + C &= \int 1\cdot dt = \int \frac{x'(t)}{2\cos\frac{x(t)}{2}}\,dt \;\underset{du=x'(t)/2\,dt}{\overset{u=x(t)/2}{=\!=\!=\!=}}\; = \int\frac{du}{\cos u} = \int\frac{\cos u\,du}{1-\sin^2 u} \;\underset{dz=\cos u\,du}{\overset{z=\sin u}{=\!=\!=\!=}} \\ &= \int\frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)dz = \frac{1}{2}\left(-\ln|1-z| + \ln|1+z|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x(t)}{2}}{1-\sin\frac{x(t)}{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\frac{x(t)}{2}}{1-\sin\frac{x(t)}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\left(1+\sin\frac{x(t)}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x(t)}{2}}\ . \end{aligned}$$

Można więc napisać

$$e^{2(t+C)} = \frac{(1+\sin\frac{x(t)}{2})^2}{\cos^2\frac{x(t)}{2}} = \frac{(1+\sin\frac{x(t)}{2})^2}{1-\sin^2\frac{x(t)}{2}} = \frac{1+\sin\frac{x(t)}{2}}{1-\sin\frac{x(t)}{2}}\ .$$

Stąd wyznaczamy

$$\sin\frac{x(t)}{2} = \frac{e^{2(t+C)}-1}{e^{2(t+C)}+1},\ \text{czyli}\ x(t) = 2\arcsin\frac{e^{2(t+C)}-1}{e^{2(t+C)}+1}\ .$$

Bez trudu można stwierdzić, że funkcja x jest na całej prostej $(-\infty,+\infty)$ ściśle rosnąca. Mamy też $x(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}2\frac{\pi}{2} = \pi$. Fizyczna interpretacja znalezionego rozwiązania jest następująca: wahadło zostało popchniete z taką siłą, że będzie poruszać się z malejącą prędkością w kierunku swego górnego położenia, ale nigdy go nie osiągnie! W szczególności to rozwiązanie **nie** jest funkcją okresową.

Rozważony przykład to szczególny przypadek równania o zmiennych rozdzielonych

$$x'(t) = f(t)g\big(x(t)\big)$$

zapisywanego często niecałkiem precyzyjnie w postaci $x' = f(t)g(x)$. Podamy bez dowodu twierdzenie, którego ogólniejsza wersja zostanie podana później.

Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności dla równania o zmiennych rozdzielonych Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale (α,β), a funkcja g jest ma ciągłą pochodną na przedziale (a,b), to dla każdej pary punktów $t_0 \in (\alpha,\beta)$, $x_0 \in (a,b)$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że na przedziale $(t_0-\delta, t_0+\delta) \subseteq (\alpha,\beta)$ równanie $x'(t) = f(t)g\big(x(t)\big)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x(t)$ spełniające warunek $x(t_0) = x_0$. $\boxtimes$

Rozwiążemy równanie $x'(t) = tx(t)$. Piszemy $t = \frac{x'(t)}{x(t)}$. Całkujemy obie strony względem t. Otrzymujemy $\frac{1}{2}t^2 + C = \int t\,dt = \int \frac{x'(t)}{x(t)}dt = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$. Stąd $|x| = e^C \cdot e^{t^2/2}$ i wobec tego $x(t) = \pm e^c \cdot e^{t^2/2}$. Niech C_1 oznacza dowolną liczbę rzeczywistą (dodatnią, ujemną lub 0) i niech $x(t) = C_1 e^{t^2/2}$. Ta funkcja jest rozwiązaniem równania $x'(t) = tx(t)$, co można bez trudu sprawdzić (z przeprowadzonych wcześniej obliczeń wynika, że tak jest dla $C_1 \neq 0$). Innych rozwiązań nie ma, bowiem funkcja t jest ciągła na całej prostej (a nawet różniczkowalna i to nieskończenie wiele razy), funkcja x jest różniczkowalna i jej pochodna, 1, jest ciągła (bo jest stała), więc są spełnione założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności, zatem teza też. Przyjmując $C_1 = x_0 e^{-t_0^2}$ i $x(t) = C_1 e^{t^2/2} = x_0 e^{t^2/2 - t_0^2/2}$ otrzymujemy rozwiązanie spełniające warunek $x(t_0) = x_0$, a to oznacza, że innych rozwiązań już nie ma.

Zajmiemy się teraz równaniem $x'(t) = \sqrt[3]{x(t)^2}$. Postępując tak, jak poprzednio otrzymujemy $1 = \frac{x'(t)}{\sqrt[3]{x(t)^2}}$, zatem $t + C = \int dt = \int \frac{x'(t)}{\sqrt[3]{x(t)^2}}dt = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3x^{1/3}$, zatem $x(t) = \left(\frac{t+c}{3}\right)^3$. Wydawać by się mogło, że rozwiązaliśmy równanie, czyli że znaleźliśmy wszystkie jego rozwiązania. Jednak tym razem mamy kłopot. W tym przypadku $f(t) = 1$, więc funkcja f jest ciągła a nawet różniczkowalna (bo jest stała), ale funkcja $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ nie jest różniczkowalna w punkcie 0. Mam w nim pochodną, ale nieskończoną. Założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności nie są spełnione. Bez trudu sprawdzamy, że funkcja określona wzorami

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{27} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla} x < 0 \end{cases}$$

spełnia równanie $x'(t) = \sqrt[3]{x(t)^2}$, funkcja tożsamościowo równa 0, też spełnia to równanie, obie przyjmują wartość 0 w punkcie $t = 0$ i oczywiście nie pokrywają się na żadnym przedziale o środku w punkcie 0.

Zadania

1. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $(t^2-1)x' + 2tx^2 = 0,\ x(0) = 1$.

2. Rozwiązać równanie $2t^2xx' + x^2 = 2$.

3. Rozwiązać równanie $x' - tx^2 = 2tx$.

4. Rozwiązać równanie $x' = \cos(t-x)$. Można ewentualnie podstawić $y = x - t$.

5. Rozwiązać równanie $x' = \sqrt{4t + 2x - 1}$. Tu też można coś podstawić, ale co?

6. Rozwiązać równanie $(t+1)x' + tx = 0$.

7. Rozwiązać równanie $tx'x = \sqrt{1+x^2}$.

8. Rozwiązać równanie $tx' + x = x^2$, $x(1) = \frac{1}{2}$.

9. Rozwiązać równanie $x' \operatorname{ctg} t + x = 2$, $x(0) = -1$.

10. Rozwiązać równanie $x' - x = 3t - 3$, $x(0) = 0$.