Równania różniczkowe — wstęp

Zaczniemy od przypomnienia niektórych własności układów równań liniowych. Omówimy to tym razem na przykładzie. Rozważymy układ

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1\,, \\ 2x + y + \ \ z = 2\,, \\ 8x + y + 7z = 8\,. \end{cases} \tag{nj}$$

Chcemy znaleźć wszystkie rozwiązania tego układu równań, który nazywany jest niejednorodnym. Wielu studentów w takiej sytuacji ma ochotę na zastosowanie uniwersalnej metody, która „załatwia" problem. W tym przypadku jest dosyć prawdopodobne, że spróbują oni zastosować wzory Cramera. Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 9 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

— odjęliśmy pierwszy wiersz pomnożony przez 2 od wiersza drugiego, pierwszy pomnożony przez 8 od wiersza trzeciego, po czym rozwinęliśmy wyznacznik względem pierwszej kolumny i wreszcie wyłączyliśmy z pierwszego wiersza liczbę 3, a z drugiego — liczbę 9 i skorzystaliśmy z tego, że wyznacznik macierzy, w której pokrywają się dwa wiersze, jest równy 0. Ponieważ wyznacznik układu jest równy 0, więc układ może nie mieć rozwiązań w ogóle, a może też mieć ich nieskończenie wiele.

Załóżmy teraz, że dwie trójki (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) są rozwiązaniami układu (nj), tzn.

$$\begin{cases} x_1 - y_1 + 2z_1 = 1\,, \\ 2x_1 + y_1 + \ \ z_1 = 2\,, \\ 8x_1 + y_1 + 7z_1 = 8\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad \begin{cases} x_2 - y_2 + 2z_2 = 1\,, \\ 2x_2 + y_2 + \ \ z_2 = 2\,, \\ 8x_2 + y_2 + 7z_2 = 8\,. \end{cases}$$

Odejmując stronami pierwsze, drugie i trzecie równania otrzymujemy wzory:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) + 2(z_1 - z_2) = 0\,, \\ 2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) + \ \ (z_1 - z_2) = 0\,, \\ 8(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) + 7(z_1 - z_2) = 0\,. \end{cases} \tag{j}$$

Wykazaliśmy więc, że w tej sytuacji trójka $(x_1 - x_2,\, y_1 - y_2,\, z_1 - z_2)$ jest rozwiązaniem układu (j), zwanego jednorodnym. Zauważmy, że jeśli dwie trójki liczb (u_1, v_1, w_1) i (u_2, v_2, w_2), czyli dwa wektory, są rozwiązaniami układu jednorodnego, a α, β dwiema liczbami, to również trójka (wektor) $\overrightarrow{(\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha v_1 + \beta v_2, \alpha w_1 + \beta w_2)}$, zwany kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{(u_1, v_1, w_1)}$, $\overrightarrow{(u_2, v_2, w_2)}$ o współczynnikach α, β jest rozwiązaniem układu jednorodnego. Oznacza to, że zbiór rozwiązań układu jednorodnego jest przestrzenią liniową. W rozpatrywanym przypadku są to wektory prostopadłe do wektorów $\overrightarrow{(1, -1, 2)}$, $\overrightarrow{(2, 1, 1)}$ i $\overrightarrow{(8, 1, 7)}$. Ponieważ $\overrightarrow{(8, 1, 7)} = 3\overrightarrow{(2, 1, 1)} + 2\overrightarrow{(1, -1, 2)}$, więc z prostopadłości wektora $\overrightarrow{(u, v, w)}$ do wektorów $\overrightarrow{(1, -1, 2)}$ i $\overrightarrow{(2, 1, 1)}$ wynika jego prostopadłość do wektora $\overrightarrow{(8, 1, 7)} = 3\overrightarrow{(2, 1, 1)} + 2\overrightarrow{(1, -1, 2)}$, by przekonać się o tym mnożymy skalarnie ostatnią równość przez wektor $\overrightarrow{(u, v, w)}$. Wektory $\overrightarrow{(1, -1, 2)}$ i $\overrightarrow{(2, 1, 1)}$ nie są równoległe, co wynika np. z tego, że ich iloczyn wektorowy $\overrightarrow{(-3, 3, 3)}$ nie jest wektorem zerowym (zresztą równoległość wektorów oznacza ich proporcjonalność ...). Z tego, co napisaliśmy wynika od razu, że zbiór rozwiązań układu jednorodnego jest prostą przechodzącą przez $(0,0,0)$, prostopadłą do wektorów $\overrightarrow{(1,-1,2)}$ i $\overrightarrow{(2,1,1)}$. Z tego, co napisaliśmy wynika, że dla znalezienia wszystkich rozwiązań układu niejednorodnego wystarczy znaleźć jedno jego rozwiązanie i wszystkie rozwiązania układu jednorodnego. Widać od razu, że rozwiązaniem układu (nj) jest np. wektor $\overrightarrow{(1,0,0)}$. Rozwiązaniami układu jednorodnego są wektory $t\overrightarrow{(-1,1,1)}$, $t\in\mathbb{R}$, bo są one równoległe do wektora $\overrightarrow{(-3,3,3)}$. Są to **wszystkie** rozwiązania tego układu, bo jedynie wektory równoległe do $\overrightarrow{(-3,3,3)}$ są jednocześnie prostopadłe do obu wektorów $\overrightarrow{(1,-1,2)}$ i $\overrightarrow{(2,1,1)}$. Wobec tego rozwiązania układu niejednorodnego są postaci $\overrightarrow{(1,0,0)}+t\overrightarrow{(-1,1,1)}$ (innych rozwiązań układ (nj) nie ma). Oczywiście do tego samego rezultatu można dojść na drodze czysto algebraicznej. Można np. potraktować niewiadomą z jako parametr i znaleźć wzory na x oraz y (tak zostało to zrobione w czasie wykładu). Przekonamy się niebawem, że opisane zjawisko występuje również w innych sytuacjach, w których znajdowanie rozwiązań jest mniej oczywiste.

Będziemy zajmować się równaniem

$$x'(t)=kx(t)\,,$$

w którym k oznacza daną liczbę, a x poszukiwaną funkcję zmiennej t. Nie jest trudno zauważyć, że funkcja e^{kt} jest rozwiązaniem tego równania. Oczywiście nie jedynym. Jeśli pomnożymy tę funkcję np. przez $\sqrt[3]{11}$, to też otrzymamy rozwiązanie. Ogólnie funkcja Ce^{kt} jest rozwiązaniem równania $x'(t)=kx(t)$ dla każdej liczby C, bo $\big(Ce^{kt}\big)'=kCe^{kt}$. Wykażemy, że innych rozwiązań to równanie nie ma.

Jeśli $x'(t)=kx(t)$, to $\big(x(t)e^{-kt}\big)'=x'(t)e^{-kt}-x(t)ke^{-kt}=kx(t)e^{-kt}-x(t)ke^{-kt}=0$ dla każdej liczby t. Oznacza to, że funkcja $x(t)e^{-kt}$ jest stała na przedziale, na którym jest określona (zakładamy, że dziedziną funkcji x jest pewien przedział). Oznaczając wartość funkcji $x(t)e^{-kt}$ przez C otrzymujemy równość $x(t)=Ce^{kt}$. Wykazaliśmy, że odgadnięte rozwiązania są jedynymi. Przy okazji możemy zauważyć, że rozwiązania te tworzą jednowymiarową przestrzeń liniową.

Teraz zajmiemy się równaniem

$$x'(t)=-3x(t)+\sin t\,. \tag{njr}$$

Podobnie jak w przypadku rozpatrywanego poprzednio układu równań liniowych możemy zauważyć, że jeśli funkcje x_1 i x_2 spełniają równanie (nj), to ich różnica $u=x_1-x_2$ spełnia równanie

$$u'(t)=-3u(t)\,. \tag{jr}$$

Mamy bowiem

$$u'(t)=\big(x_1(t)-x_2(t)\big)'=x_1'(t)-x_2'(t)=-3x_1(t)+3x_2(t)=-3\big(x_1(t)-x_2(t)\big)=-3u(t)\,.$$

Możemy więc postąpić podobnie jak w przypadku równania (nj): zgadnąć jedno rozwiązanie i dodać do niego wszystkie rozwiązania równania (jr). W równaniu (njr) występuję funkcja sinus. Można więc spróbować znaleźć liczby A, B tak, by funkcja $A\cos t + B\sin t$ okazała się rozwiązaniem równania (njr). Podstawiamy $x(t) = A\cos t + B\sin t$ i otrzymujemy

$$-A\sin t + B\cos t = -3\big[A\cos t + B\sin t\big] + \sin t = -3A\cos t + (1-3B)\sin t\,.$$

Wystarczy więc wybrać liczby A, B tak, by $-A = 1-3B$ i $B = -3A$. Rozwiązując ten układ równań liniowych z niewiadomymi A, B otrzymujemy: $A = -\frac{1}{10}$ i $B = \frac{3}{10}$. Przekonaliśmy się, że funkcja $x_1(t) = -\frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t$ jest jednym z rozwiązań równania $x'(t) = -3x(t) + \sin t$. Wiemy już, że wtedy funkcja $x - x_1$ spełnia równanie $u'(t) = -3u(t)$, zatem istnieje liczba C taka, że $x(t) - x_1(t) = Ce^{-3t}$ dla każdej liczby t, czyli $x(t) = -\frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t + Ce^{-3t}$. Zgadując i pomagając sobie rozumowaniami ograniczającymi zbiór rozwiązań do odgadniętych funkcji rozwiązaliśmy równanie różniczkowe. W przyszłości sformułujemy twierdzenia opisujące rozwiązania najprostszych równań różniczkowych, których na razie nie zdefiniowaliśmy, ale wstępnie możemy powiedzieć, że są to równania, w których niewiadomą jest funkcja i w których pojawia się zarówno funkcja jak i jej pochodna.

Na zakończenie pokażemy jeszcze jeden sposób postępowania umożliwiający rozwiązanie równania różniczkowego niejednorodnego (njr) po rozwiązaniu równania (jr). Możemy szukać rozwiązania w postaci $c(t)e^{-3t}$. Ma to sens, bo funkcja e^{-3t} nie przyjmuje wartości 0, więc można zdefiniować $c(t) = \frac{x(t)}{e^{-3t}} = x(t)e^{3t}$. Podstawiając tę funkcję do równania (njr) otrzymujemy równość

$$\big[c(t)e^{-3t}\big]' = -3c(t)e^{-3t} + \sin t\,.$$

Po zróżniczkowaniu lewej strony i redukcji otrzymujemy

$$c'(t)e^{-3t} - 3c(t)e^{-3t} = -3c(t)e^{-3t} + \sin t\,,$$

czyli $c'(t)e^{-3t} = \sin t$, tzn. $c'(t) = e^{3t}\sin t$. Wystarczy więc znaleźć $\int e^{3t}\sin t\,dt$. Scałkujemy dwukrotnie przez części:

$$\int e^{3t}\sin t\,dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{3}\int e^{3t}\cos t\,dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{9}e^{3t}\cos t - \tfrac{1}{9}\int e^{3t}\sin t\,dt\,.$$

Otrzymaliśmy równanie w którym niewiadomą jest poszukiwana całka. Możemy je przepisać w postaci

$$\tfrac{10}{9}\int e^{3t}\sin t\,dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{3}\int e^{3t}\cos t\,dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{9}e^{3t}\cos t + c\,,$$

gdzie c oznacza pewną stałą. Mnożąc przez $\frac{9}{10}$ otrzymujemy

$$\int e^{3t}\sin t\,dt = \tfrac{3}{10}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{10}e^{3t}\cos t + c\,.$$

Wobec tego możemy napisać, że funkcja $\big[\frac{3}{10}e^{3t}\sin t - \frac{1}{10}e^{3t}\cos t + c\big]e^{-3t} = \frac{3}{10}\sin t - \frac{1}{10}\cos t + ce^{-3t}$ jest rozwiązaniem równania (njr).

Metoda zastosowana przed chwilą jest nazywana *uzmiennianiem stałej*, bo w rozwiązaniu równania jednorodnego zastępujemy stałą przez funkcję, co sprowadza rozwiązywanie równania różniczkowego do całkowania.

Uwaga

Równanie $x'(t) = kx(t)$ pojawia się w wielu sytuacjach. Np. Jeśli przyjmiemy, że t oznacza czas,

$x(t)$ masę substancji promieniotwórczej w chwili t i że ubytek masy jest proporcjonalny do masy w danej chwili i czasu oraz, że k jest współczynnikiem proporcjonalności, to możemy napisać, że $x(t+\Delta t)-x(t)=kx(t)\Delta t$, a raczej, że $x(t+\Delta t)-x(t)\approx kx(t)\Delta t$, czyli $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\approx kx(t)$, przy czym przybliżenie jest tym dokładniejsze im, Δt jest mniejsze. W granicy otrzymujemy

$$x'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=kx(t)\,.$$

Oczywiście w opisanej sytuacji k oznacza liczbę ujemną. Podobny rezultat otrzymać można rozpatrując np. długość pręta metalowego jako funkcję temperatury z tym, że w tym przypadku k oznaczać będzie liczbę dodatnią. W obydwóch przypadkach w opisie matematycznym występuje funkcja wykładnicza. Występuje ona również wtedy, gdy interesuje nas liczebność jakiejś populacji jako funkcja czasu, przy założeniu, że warunki życia są niezmienne w czasie. $\blacksquare$