Zadanie 2

TEMAT: Niech $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ dla (x,y) $\neq$ (0,0).

Pokazać, że granice iterowane: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$ i $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$ istnieją i są równe 0, ale $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nie istnieje.

ROZWIĄZANIE:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0+x^2}=\lim_{x\to 0}0=\underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{0}{0+(-y)^2}=\lim_{y\to 0}0=\underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Szukamy granicy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

Obliczmy granicę wzdłuż drogi y = 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0+x^2}=\lim_{x\to 0}0=\underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Obliczmy granicę wzdłuż drogi y = x:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+0^2}=\lim\limits_{x\to 0}1=\underline{\underline{\mathbf{1}}}\neq\mathbf{0}\Rightarrow$ granica nie istnieje bo wzdłuż różnych dróg osiąga różne wartości.