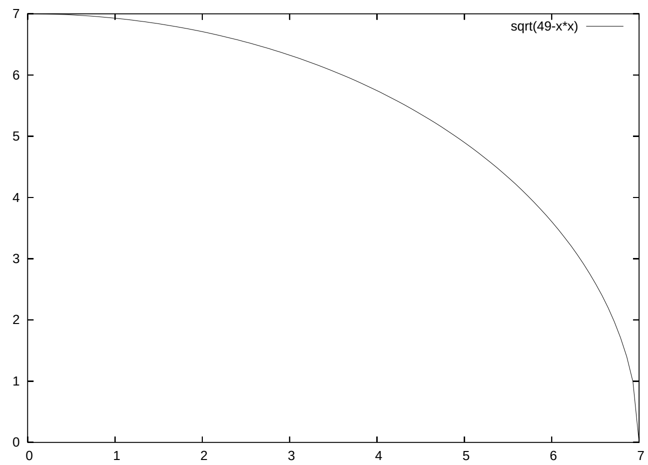
O jednym zadaniu testowym .

Zadanie 133 - testy

Całka podwójna z funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ po obszarze $0 \leq x \leq 7$, $0 \leq y \leq \sqrt{49 - x^2}$ jest równa.

Rozwiązanie

Zauważmy, że obszarem całkowania jest ćwiartka koła o promieniu długości 7, położona w I quadrancie prostokątnego układu współrzędnych.(rys.).



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$

Mamy obliczyć $\int\int_{1/4K} \sqrt{x^2 + y^2} l^2(dxdy)$.

Do obliczenia całki wprowadzimy współrzędne biegunowe B.

Rozważmy odwzorowanie $B : (r, \alpha) \to (r \cos\alpha, r \sin\alpha)$.

B przekształca dyfeomorficznie zbiór otwarty $(0, 7) \times (0, \pi/2)$ na zbiór otwarty

$$V = \left\{(x, y) : 0 < x < 7, 0 < x^2 + y^2 < 49, (x, y) \neq (0, 7) \times \{0\}\right\}$$

Ponieważ zbiór V różni się od zbioru $1/4K$ o zbiór miary l^2 zero, więc na mocy twierdzenia o zamianie zmiennych

$$detDB(r,\ \alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -r\sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha = r$$

Na mocy twierdzenia Tonellego (bo funkcja podcałkowa jest nieujemna)

$$\int\int_{1/4K} \sqrt{x^2+y^2} l^2(dxdy) = \int_0^7 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2} r d\alpha dr = \pi/2 \int_0^7 r^2 = \frac{\pi}{2}\frac{r^3}{3} |_0^7 = \frac{343\pi}{6}$$