Szeregi liczbowe

1 Warunek konieczny zbieżności szeregów

Twierdzenie 1 *Jeżeli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Korzystając z warunku koniecznego wykazać rozbieżność szeregów:

1. $\sum \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{1}{n}$.
W naszym przypadku mamy $a_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{1}{n}$ i stąd
$$\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{1}{n} = 2 \cdot \cos 0 = 2 \neq 0.$$

2. $\sum (-1)^n n \tan \frac{1}{n}$.
Zauważmy, że dla $n = 2k$ mamy
$$\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} 2k \tan \frac{1}{2k} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{\sin \frac{1}{2k}}{\frac{1}{2k}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\cos \frac{1}{2k}}_{\to 1} = 1,$$
zaś dla $n = 2k + 1$
$$\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} (2k+1) \tan \frac{1}{2k+1} = -\lim_{k\to\infty} \frac{\tan \frac{1}{2k+1}}{\frac{1}{2k+1}} = -1,$$
co oznacza, że granica $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n \tan \frac{1}{n}$ nie istnieje.

3. Do samodzielnego opracowania:
a) $\sum \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$;
b) $\sum \cos(n\pi) \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n$.

2 Kryterium porównawcze

Twierdzenie 2 *Załóżmy, że dane są ciągi o wyrazach nieujemnych* (a_n) *i* (b_n) *spełniające warunek:*
$$\exists_{k\in N} \forall_{n\geq k} \quad a_n \leq b_n.$$
Wówczas:
1) Jeśli szereg $\sum b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum a_n$ *jest zbieżny.*
2) Jeśli szereg $\sum a_n$ *jest rozbieżny, to szereg* $\sum b_n$ *jest rozbieżny.*

Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\sum\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$.
Zauważmy, że mamy oszacowanie:

$$\sqrt{n^2+2}-n=\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\geq\frac{2}{\sqrt{n^2+3n^2}+n}=\frac{2}{\sqrt{4n^2}+n}=\frac{2}{3n}.$$

Ponieważ szereg $\sum\frac{2}{3n}$ jako harmoniczny rzędu 1 jest rozbieżny, więc badany szereg też jest rozbieżny.

2. $\sum\left(\sqrt[3]{n^3+4}-n\right)$.
W tym przypadku mamy:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^3+4}-n&=\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+4}-n\right)\left(\sqrt[3]{\left(n^3+4\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+4}+n^2\right)}{\sqrt[3]{\left(n^3+4\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+4}+n^2}\\&=\frac{n^3+4-n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3+4\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+4}+n^2}\\&=\frac{4}{\sqrt[3]{\left(n^3+4\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+4}+n^2}\leq\frac{4}{n^2}.\end{aligned}$$

Ponieważ szereg $\sum\frac{4}{n^2}$ jako harmoniczny rzędu 2 jest zbieżny, więc badany szereg też jest zbieżny.

3. $\sum\frac{\ln(n+2)}{n^2\sqrt{n}+\sqrt{n}}$.
Ponieważ dla wszystkich $x>0$ zachodzi nierówność $\ln x<x$, więc

$$\frac{\ln(n+2)}{n^2\sqrt{n}+\sqrt{n}}\leq\frac{n+2}{\sqrt{n}\left(n^2+1\right)}\leq\frac{n+n}{n^2\sqrt{n}}=\frac{2}{n\sqrt{n}}.$$

Zatem ze zbieżności szeregu $\sum\frac{2}{n\sqrt{n}}$ wynika zbieżność szeregu $\sum\frac{\ln(n+2)}{n^2\sqrt{n}+\sqrt{n}}$.

4. $\sum\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt[3]{n}+1\right)}\cos\frac{1}{n}$.
Zauważmy, że skoro $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=1$, to dla pewnego $k\in\mathbb{N}$ zachodzi warunek: $\cos\frac{1}{n}\geq\frac{1}{2}$ dla $n>k$. Dostajemy stąd

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt[3]{n}+1\right)}\cos\frac{1}{n}\geq\frac{1}{2\sqrt{n}\left(\sqrt[3]{n}+1\right)}&\geq\frac{1}{2\sqrt{n}\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}\right)}\\&=\frac{1}{4\sqrt{n}\sqrt[3]{n}}=\frac{1}{4n^{5/6}}.\end{aligned}$$

Z rozbieżności szeregu $\sum\frac{1}{4n^{5/6}}$ wynika więc rozbieżność szeregu $\sum\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt[3]{n}+1\right)}\cos\frac{1}{n}$.

5. $\sum \sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\tan\frac{1}{n}$.
Zauważmy najpierw, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Ponadto dla $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ zachodzą nierówności

$$\frac{x}{2}\leq\sin x\leq x\leq\tan x\leq 2x. \tag{1}$$

Wynika stąd, że $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{\pi}{4}$ oraz $\frac{1}{n}<\frac{\pi}{4}$ dla $n>k$, gdzie $k\in\mathbb{N}$. Mamy więc oszacowanie

$$\begin{aligned}\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\tan\frac{1}{n}&=\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\tan\frac{1}{n}\\&\leq\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)n}\leq\frac{1}{n\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Ze zbieżności szeregu $\sum\frac{1}{n\sqrt{n}}$ wynika zbieżność szeregu $\sum\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\tan\frac{1}{n}$.

6. $\sum\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Korzystając z nierówności (1) dostajemy

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{2\left(\sqrt{n}+1\right)\sqrt{n}}\geq\frac{1}{2\left(\sqrt{n}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n}}=\frac{1}{4\sqrt{n}}.$$

Z rozbieżności szeregu $\sum\frac{1}{4\sqrt{n}}$ wynika rozbieżność $\sum\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$.

7. Do samodzielnego opracowania:
a) $\sum\sin\frac{1}{2^n}$;
b) $\sum\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$;
c) $\sum\frac{1}{n^{\ln 5}}\sin^2 n!$;
d) $\sum\frac{n}{\ln(n^2+2)}$.

3 Kryterium d'Alemberta

Twierdzenie 3 *Załóżmy, że $a_n>0$ dla $n\in N$ i istnieje granica*

$$g=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Wówczas:

1. *Jeśli $g<1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.*
2. *Jeśli $g>1$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.*

Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\sum \frac{3^n}{n!}$.
   W tym przypadku mamy

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!},$$

   i stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!}{(n+1)! \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n!}{n!\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

   Korzystając z twierdzenia d'Alemberta wnosimy, że szereg $\sum \frac{3^n}{n!}$ jest zbieżny.

2. $\sum \frac{n^n}{n!}$.
   Mamy

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

   oraz

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n\,(n+1) \cdot n!}{n!\,(n+1) \cdot n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1, \end{aligned}$$

   a zatem szereg $\sum \frac{n^n}{n!}$ jest rozbieżny.

3. $\sum \frac{(n-1)!(n+3)! \cdot 3^n}{(2n)!}$.
   W tym przypadku

$$a_n = \frac{(n-1)!\,(n+3)! \cdot 3^n}{(2n)!}, \qquad a_{n+1} = \frac{n!\,(n+4)! \cdot 3^{n+1}}{(2\,(n+1))!}$$

   oraz

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+4)! \cdot 3^n \cdot 3 \cdot (2n)!}{(n-1)!\,(n+3)! \cdot 3^n \cdot (2n+2)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n+3)! \cdot (n+4) \cdot 3 \cdot (2n)!}{(n-1)!\,(n+3)!\,(2n)!\,(2n+1)\,(2n+2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n \cdot (n+4)}{(2n+1)\,(2n+2)} = \frac{3}{4} < 1, \end{aligned}$$

   a więc szereg $\sum \frac{(n-1)!(n+3)! \cdot 3^n}{(2n)!}$ jest zbieżny.

4. $\sum \frac{2\sqrt{n+3}}{(n+1)!}$.
   Mamy
$$a_n = \frac{2\sqrt{n+3}}{(n+1)!}, \qquad a_{n+1} = \frac{2\sqrt{n+4}}{(n+2)!}$$
   i stąd
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n+4}\cdot(n+1)!}{(n+2)!\cdot 2\sqrt{n+3}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+4}{n+3}} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,(n+2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+4}{n+3}} \cdot \frac{1}{n+2} = 0 < 1,\end{aligned}$$
   a zatem szereg $\sum \frac{2\sqrt{n+3}}{(n+1)!}$ jest zbieżny.

5. $\sum \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}$.
   Mamy
$$a_n = \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n)!}, \qquad a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2\, 3^{n+1}}{(2n+2)!}$$
   i stąd
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\,(n+1)^2\,3^n\cdot 3\cdot(2n)!}{(2n)!\,(2n+1)\,(2n+2)\,(n!)^2\,3^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3\,(n+1)^2}{(2n+1)\,(2n+2)} = \frac{3}{4} < 1,\end{aligned}$$
   a więc szereg $\sum \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}$ jest zbieżny.

6. Do samodzielnego opracowania:
   a) $\sum \frac{(3^n+1)^3}{(5^n+1)^2}$;
   b) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$;
   c) $\sum \frac{(2n)! n! 2^n}{(3n)!}$.

4 Kryterium Cauchy'ego

Twierdzenie 4 *Załóżmy, że* $a_n \geq 0$ *dla* $n \in N$ *i istnieje granica*
$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$
Wówczas:

1. *Jeśli* $g < 1$*, to szereg* $\sum a_n$ *jest zbieżny.*

2. *Jeśli* $g > 1$*, to szereg* $\sum a_n$ *jest rozbieżny.*

Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\sum \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$.
W tym przypadku mamy
$$a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$$
i stąd
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right)^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1,$$
a więc szereg $\sum \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$ jest zbieżny.

2. $\sum \left(\sqrt{n^2+6n+2} - n - 1\right)^n$.
Mamy
$$a_n = \left(\sqrt{n^2+6n+2} - n - 1\right)^n$$
i stąd
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt{n^2+6n+2} - n - 1\right)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+6n+2} - n - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6n+2-n^2-2n-1}{\sqrt{n^2+6n+2}+n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+6n+2}+n+1} = \frac{4}{2} = 2 > 1,\end{aligned}$$
a więc szereg $\sum \left(\sqrt{n^2+6n+2} - n - 1\right)^n$ jest rozbieżny.

3. $\sum \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$.
Mamy
$$a_n = \frac{(\arcsin n)^n}{2^n}$$
i stąd
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\arcsin n)^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin n}{2} = \frac{\pi}{4} < 1,$$
a więc szereg $\sum \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$ jest zbieżny.

4. Do samodzielnego opracowania:
   a) $\sum \frac{n^{100} 99^n}{100^n}$;
   b) $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{\frac{1}{2}n}$;
   c) $\sum \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$.

5 Kryterium Leibniza

Twierdzenie 5 *Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem liczbowym takim, że*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
2. *od pewnego miejsca k ciąg $(|a_n|)$ jest monotoniczny, tzn.*

$$|a_n| \geq |a_{n+1}|, \qquad \textit{dla} \quad n \geq k.$$

Wówczas szereg $\sum (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.
   W naszym przypadku

$$a_n = \frac{n}{n^2+1}.$$

Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Pokażemy, że ciąg (a_n) jest malejący.

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{n}{n^2+1} - \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \\ &= \frac{n(n+1)^2 + n - (n+1)\left(n^2+1\right)}{(n^2+1)\left((n+1)^2+1\right)} \\ &= \frac{n^3+2n^2+2n-n^3-n^2-n-1}{(n^2+1)\left((n+1)^2+1\right)} \\ &= \frac{n^2+n-1}{(n^2+1)\left((n+1)^2+1\right)} > 0 \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $a_n > a_{n+1}$ dla wszystkich liczb naturalnych n. Ostatecznie szereg $\sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ jest zbieżny.

2. $\sum \cos(n\pi) \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
   Zauważmy, że $\cos(n\pi) = (-1)^n$ i

$$a_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Mamy przy tym

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sin 0 = 0.$$

Ponadto ciąg (a_n) jest malejący, bowiem

$$\begin{array}{c}
n < n+1 \\
\Downarrow \\
\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \\
\Downarrow \\
\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\
\Downarrow \qquad \sin \text{ jest funkcją rosnącą na } \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\
\sin \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}},
\end{array}$$

czyli $a_{n+1} < a_n$. Ostatecznie szereg $\sum \cos(n\pi) \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ jest zbieżny.

3. Do samodzielnego opracowania:
   a) $\sum \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$;
   b) $\sum (-1)^{n+1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

6 Zbieżność bezwzględna i warunkowa

Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregów:

1. $\sum \frac{1}{n^2} \sin n$.
   Zauważmy, że

$$\left|\frac{1}{n^2} \sin n\right| = \frac{1}{n^2} |\sin n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

   Ponieważ szereg $\sum \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (jako harmoniczny rzędu 2), to na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum \left|\frac{1}{n^2} \sin n\right|$ jest zbieżny. Zatem szereg $\sum \frac{1}{n^2} \sin n$ jest bezwzględnie zbieżny.

2. $\sum (-1)^n \frac{n+1}{n^3-1}$.
   Mamy

$$\left|(-1)^n \frac{n+1}{n^3-1}\right| = \frac{n+1}{n^3-1} \leq \frac{n}{n^3-1} \leq \frac{n}{\frac{n^3}{2}} = \frac{2}{n^2}.$$

   Ponieważ szereg $\sum \frac{2}{n^2}$ jest zbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum (-1)^n \frac{n+1}{n^3-1}$ jest bezwzględnie zbieżny.

3. $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Mamy

$$\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$
$$\geq \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}n}.$$

Ponieważ szereg $\sum \frac{1}{2\sqrt{2}n}$ jest rozbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ jest też rozbieżny.
Oznaczmy teraz

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Oczywiście $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Łatwo też wykazać, że ciągi o wyrazach $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ i $\sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ odpowiednio, są malejące. Stąd ich iloczyn, a więc ciąg (a_n), jest malejący. Na mocy kryterium Leibniza szereg $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny.

4. $\sum \frac{(n+1)4^n}{n!} \sin n$.
Zauważmy, że

$$\left|\frac{(n+1)\,4^n}{n!} \sin n\right| \leq \frac{(n+1)\,4^n}{n!}.$$

Oznaczając

$$a_n = \frac{(n+1)\,4^n}{n!}$$

dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot 4^n \cdot 4 \cdot n!}{(n+1)\cdot 4^n \cdot n! \cdot (n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\,(n+2)}{(n+1)^2} = 0 < 1.$$

Z kryterium d'Alemberta wynika więc, że szereg $\sum \frac{(n+1)4^n}{n!}$ jest zbieżny i w konsekwencji szereg $\sum \frac{(n+1)4^n}{n!} \sin n$ jest bezwzględnie zbieżny.

5. Do samodzielnego opracowania:
a) $\sum (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n!}$;
b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \sin^2 \frac{1}{n}$;
c) $\sum (-1)^{n+1} \frac{n3^{n-1}}{4^{n+1}}$.

7 Przedział zbieżności szeregu potęgowego

Wyznaczyć przedziały zbieżności następujących szeregów:

1. $\sum \frac{n!}{(2n+1)!} x^n$.
   Obliczamy promień zbieżności szeregu:
   $$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!}, \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(2n+3)!}.$$
   Stąd
   $$\begin{aligned} g &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,(2n+1)!}{(2n+3)!n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+1)\,(2n+1)!}{(2n+1)!\,(2n+2)\,(2n+3)\,n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+2)\,(2n+3)} = 0. \end{aligned}$$
   W takim razie promień zbieżności szeregu jest równy ∞, co oznacza zbieżność szeregu $\sum \frac{n!}{(2n+1)!} x^n$ dla dowolnego $x \in (-\infty, \infty)$.

2. $\sum \frac{n!}{(n+1)!} (-2x)^n$.
   Wyznaczamy promień zbieżności:
   $$a_n = \frac{n!}{(n+1)!} (-2)^n = \frac{(-2)^n}{n+1}.$$
   Stąd
   $$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n+1}} = 2.$$
   i promień zbieżności jest równy $r = \frac{1}{2}$, co oznacza zbieżność szeregu $\sum \frac{n!}{(n+1)!} (-2x)^n$ dla $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Zbadamy teraz zbieżność szeregu w krańcach otrzymanego przedziału, tzn. dla $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{1}{2}$.

   - $x = -\frac{1}{2}$; wtedy
     $$\sum \frac{n!}{(n+1)!} (-2x)^n = \sum \frac{1}{n+1}$$
     i jest to szereg rozbieżny (jest porównywalny z szeregiem harmonicznym rzędu 1).
   - $x = \frac{1}{2}$; wtedy
     $$\sum \frac{n!}{(n+1)!} (-2x)^n = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Oznaczmy

$$a_n = \frac{1}{n+1}.$$

Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, oraz ciąg (a_n) jest malejący; istotnie:

$$\begin{gathered} n+1 < n+2 \\ \Downarrow \\ \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \\ \Downarrow \\ a_{n+1} < a_n. \end{gathered}$$

Z twierdzenia Leibniza wynika więc, że szereg $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ jest zbieżny.
Ostatecznie szereg $\sum \frac{n!}{(n+1)!} (-2x)^n$ jest zbieżny w przedziale $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

3. $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} (\tan x)^n$.
Wyznaczmy promień zbieżności:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} = 1,$$

co oznacza, że promień zbieżności jest równy 1. Wynika stąd, że szereg $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} (\tan x)^n$ jest zbieżny dla tych x, dla których jest spełniony warunek $|\tan x| < 1$.

- jeśli $\tan x = 1$, to dostajemy szereg $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ i jest to szereg rozbieżny (bo jest porównywalny z szeregiem harmonicznym rzędu $\frac{1}{2}$).
- jeśli $\tan x = -1$, to otrzymujemy szereg $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, który jest zbieżny (na mocy kryterium Leibniza).
Ostatecznie szereg $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} (\tan x)^n$ jest zbieżny dla x spełniających warunek

$$-1 \leq \tan x < 1,$$

czyli dla

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

4. $\sum \frac{1}{n^2+1}\left(2x-1\right)^n$.

5. Do samodzielnego opracowania:
   a) $\sum n!\left(2x-1\right)^n$;
   b) $\sum \frac{n+1}{3n^2+4}x^n$;
   c) $\sum \left(-1\right)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n^2+2n}$;
   d) $\sum \frac{(n+2)!(5-3x)^n}{5^{n+1}}$.