

Zestaw 11.

Ciągłość i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych.

Zadanie 1. Przedstawić graficznie dziedziny (naturalne) podanych funkcji:

a) $f(x, y) = \frac{1}{(x-2)(y+1)}$ b) $f(x, y) = \log_{x^2+y^2} (4 - x^2 - y^2)$

c) $f(x, y) = \sqrt[4]{xy}$ d) $f(x, y) = \sqrt{\ln \cos(x - y)}$

Zadanie 2. Zbadać ciągłość podanych funkcji:

a) $f(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 < 1 \\ x^2 + y^2 - 1 & \text{dla } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{dla } x > 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Zadanie 3. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f w punkcie $(0, 0)$:

a) $f(x, y) = (x + 1)^{y+1}$; b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 y}$; d) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } xy = 0 \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$

Zadanie 4. Zbadać różniczkowalność podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (1, -2)$;

b) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;

d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Zadanie 5. Zbadać, czy dla podanych funkcji zachodzi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

- a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;
- b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;
- c) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 - 8y^3}$.

Zadanie 6. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial z}{\partial y}$ podanych funkcji złożonych:

- a) $z = f(u, v) = \ln \frac{u}{v+1}$, gdzie: $u = x \sin y$ i $v = x \cos y$;
- b) $z = f(u, v, w) = \arcsin \frac{u}{v+w}$, gdzie: $u = e^{\frac{x}{y}}$, $v = x^2 + y^2$ oraz $w = 2xy$.

Zadanie 7. Niech φ oraz ψ będą dowolnymi funkcjami mającymi pierwszą i drugą pochodną. Uzasadnić, że określona poniżej funkcja f spełnia podane równanie:

- a) $f(t, x) = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$;
- b) $f(x, y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Zadanie 8. Obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

- a) $\frac{\operatorname{arctg} 0,9}{\sqrt{4,02}}$ b) $1,01 \sin\left(\frac{\pi}{6} + 0,1\right)$ c) $0,98^{1,01}$.