Ekstrema warunkowe. Metoda mnożników Lagrange'a

Zadanie 1

Proszę znaleźć minimum i maksimum funkcji f na zbiorze E dla

1) $f(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$; $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$;

2) $f(x,y) = 4xy$; $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

3) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$; $E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$;

4) $f(x,y,z) = x + y + z$; $E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$;

5) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$; $E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

Zadanie 2

Proszę znaleźć punkty na powierzchni $z = xy+5$, które znajdują się najbliżej punktu$(0,\ 0,\ 0)$.

Zadanie 3

Proszę znaleźć maksimum objętości prostopadłościanu o ścianach prostopadłych do odpowiednich osi układu współrzędnych wpisanego w elipsoidę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Zadanie 4

Proszę znaleźć minimum sumy kwadratów 100 liczb dodatnich, których suma wynosi 200.

Zadanie 5

Proszę pokazać, że minimum funkcji produkcji $P(x,y) = x^\alpha y^\beta$, gdzie $(\alpha + \beta = 1,$
$\alpha > 0, \beta > 0)$ (funkcja Cobba-Douglasa), przy stałych kosztach $ax+by = 1$ jest osiągane dla $x = \frac{\alpha}{a}$, $y = \frac{\beta}{b}$.

Zadanie 6

Proszę znaleźć najmniejszą odległość punktu p od zbioru $M = \{x \in \mathbf{R}^k : v \cdot x + a = 0\}$,
$v \in \mathbf{R}^k$, $a \in \mathbf{R}$, $v \neq 0$, $p \in \mathbf{R}^k$.
Proszę zinterpretować otrzymany wynik dla $k = 2$, $k = 3$.