

1 Dziedzina, powierzchnie.

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

(a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{x^2+y^2+2x} - 1}$;

(b) $f(x, y) = \arccos \frac{x}{2x+y}$;

(c) $f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$;

(d) $f(x, y) = \frac{\ln(2+y)}{\sqrt{2x-y-x^2}}$;

(e) $f(x, y, z) = \sqrt{-x^2 + 2x - y^2 - z^2}$;

(f) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\sin(x^2+y^2+z^2)}}$;

(g) $f(x, y) = \sqrt{y+2} + \sqrt{\sin(x+y)}$;

(h) $f(x, y) = \arcsin \ln(x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25)$;

(i) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1} - \sqrt{y^2 - x^2 + 1} + 2$.

2. Naskicować powierzchnie:

(a) $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$;

(b) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4z = 0$;

(c) $\frac{x^2}{2} + y^2 - 2z^2 = 2$;

(d) $x^2 - 2x + y^2 - 4z^2 + 3 = 0$.

3. Naskicować wykres funkcji:

(a) $f(x, y) = 1 - \sqrt{-x^2 + 2x - y^2}$;

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y$;

(c) $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + 2x + y^2 + 2y + 5}$;

(d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

2 Granice i ciągłość

1. Oliczyć granice (lub wykazać, że granica nie istnieje)

(a) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y}{x+1}$;

(b) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{x} + 1\right) \arctan(x^2 + y^2)$;

(c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin 2x}{3y}$;

(d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \frac{1}{y}$;

(e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x-1+y}$.

2. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

nie ma granicy podwójnej w punkcie $p = (0, 0)$ ale posiada obie granice iterowane.

3. Wykazać, że dla funkcji

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

granice iterowane $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$ i $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ nie istnieją, ale $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

4. Czy istnieje granica

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}?$$

5. Zbadać istnienie granic iterowanych i granicy podwójnej dla funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - 2y)^2} \quad \text{w punkcie } (0, 0).$$

6. Zbadać istnienie granic iterowanych i granicy podwójnej dla funkcji

$$f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y} \quad \text{w punkcie } (0, 0).$$

7. Obliczyć granicę

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \cos xy.$$

8. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z \cos \frac{1}{|x| + |y| + |z|}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

9. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Wskazówka: skorzystać z nierówności $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

10. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Wskazówka: skorzystać z nierówności: $\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$.