Funkcje wielu zmiennych –ciągłość

Do tej pory zajmowaliśmy się funkcjami jednej zmiennej. W wielu zagadnieniach inżynierskich, występują wielkości zależne od wielu czynników, co prowadzi do rozpatrywania funkcji więcej niż jednej zmiennej. Okazuje się, że wygodnie jest traktować pary liczb rzeczywistych jako punkty płaszczyzny (na której ustalony został układ współrzędnych prostokątnych). Analogicznie trójki liczb rzeczywistych traktujemy jako punkty przestrzeni trójwymiarowej, w której ustalony został układ współrzędnych prostokątnych. To podejście jest tak wygodne, że przenosimy je na przestrzenie o większej liczbie wymiarów: czwórki liczb rzeczywistych tworzą przestrzeń czterowymiarową, piątki- pięciowymiarową, itd. W matematyce rozpatrywane są również przestrzenie nieskończenie wymiarowe, jednak ta tematyka wykracza poza zakres niezbędny studentom pierwszego roku Politechniki, więcej o nich w dalszym ciągu mowy nie będzie.

Definicja k – **wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej (euklidesowej)**

k wymiarową przestrzenią kartezjańską nazywamy zbiór wszystkich k-elementowych ciągów liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, ..., x_k)$. Oznaczamy ją symbolem $\mathbf{R}^k$. Piszemy $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$, tzn. gdy $\mathbf{x}$ jest k-elementowym ciągiem liczb rzeczywistych. Elementy przestrzeni $\mathbf{R}^k$ nazywamy punktami przestrzeni k-wymiarowej lub wektorami.(w tym drugim przypadku myślimy o wektorze, którego początkiem jest punkt $\mathbf{0} = (0, 0, ...0)$, a końcem interesujący nas punkt).

Definicja standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbf{R}^k$

Wielkość $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ky_k$ nazywamy iloczynem skalarnym wektorów $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ oraz $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_k)$ i oznaczamy symbolem $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Definicja normy indukowanej przez iloczyn skalarny

Normą wektora $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$ indukowaną przez iloczyn skalarny $\cdot$ nazywamy liczbę $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. Tę normę często nazywamy euklidesową.

Podstawowe własności normy

- **a.** dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$ zachodzi $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ - nierówność trójkąta,
- **b.** dla dowolnego wektora $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$ i dowolnej liczby $t \in \mathbf{R}$ zachodzi $\|t\mathbf{x}\| = |t| \cdot \|\mathbf{x}\|$ - jednorodność normy,
- **c.** dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$ zachodzi nierówność $\|\mathbf{x}\| \ge 0$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- **d.** dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$ zachodzi nierówność Schwarza: $\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $t \ge 0$ taka, że $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$ lub $\mathbf{y} = t\mathbf{x}$, tzn. gdy wektory $\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{y}$ są zgodnie równoległe.

Dowód Najpierw wykażemy nierówność Schwarza. **d.**

Definiujemy wielomian kwadratowy

$$(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+...+a_n^{\ 2})t^2-2\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)t+(b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+...+b_n^{\ 2})=$$

$$=(a_1t-b_1)^2+(a_2t-b_2)^2+...+(a_nt+b_n)^2$$

Przyjmuje jedynie nieujemne wartości, więc jego wyróżnik (popularna $\Delta=b^2-4ac$) jest mniejszy od 0, to właśnie jest nierówność Schwarza.
Części **b. i c.** wynikają wprost z definicji normy. Trzeba jeszcze wykazać nierówność trójkąta.

Mamy
$$(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|^2-(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})=$$
$$=\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|^2-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})=2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\geq 0.$$

Ostatnia nierówności jest bezpośrednim wnioskiem z nierówności Schwarza. Dowód został zakończony.
Przypomnijmy jeszcze, że iloczyn skalarny wektorów na płaszczyźnie to iloczyn ich norm, czyli długości i kosinusa kąta jaki tworzą. Studenci nie znający tej definicji mogą posłużyć się twierdzeniem kosinusów dla udowodnienia go. Jeśli rozszerzymy tę interpretację na przestrzenie o większej liczbie wymiarów, to wtedy nierówność Schwarza oznaczać będzie, że wartość kosinusa między wektorami jest mniejsza lub równa 1 przy czym wartość 1 jest osiągana jedynie wtedy, gdy kosinus kąta między wektorami równy jest 1, czyli gdy miara kąta między wektorami równa jest 0 (wektory są zgodnie równoległe).

Definicja kuli k-**wymiarowej**

Kulą otwartą o środku w punkcie $\mathbf{p}$ i promieniu $r>0$ nazywamy zbiór $\mathbf{B}(\mathbf{p},r)=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^k:\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|<r\}$, kulą domkniętą o środku $\mathbf{p}$ i promieniu $r>0-$ zbiór $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{p},r)=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^k:\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\leq r\}$.

Jednowymiarową kula otwartą o środku w punkcie $\mathbf{p}\in\mathbf{R}$ i promieniu $r>0$ jest przedział o środku w punkcie $\mathbf{p}$ i długości $2r$. Jednowymiarowa kula domknięta o środku w punkcie $\mathbf{p}$ i promieniu $r>0$ to przedział domknięty o środku w punkcie $\mathbf{p}$ i długości $2r$. W tym samym wymiarze kula domknięta różni się od otwartej (o tym samym środku i promieniu) jedynie dwoma punktami. Jasne jest, że dwuwymiarową kulą otwartą o środku $\mathbf{p}\in\mathbf{R}^2$ i promieniu $r>0$ jest koło o środku $\mathbf{p}$ bez punktów „brzegowych”, tj. bez punktów, których odległość od $\mathbf{p}$ jest dokładnie równa r. Kula domknięta o środku $\mathbf{p}$ i promieniu $r>0$ to koło z „brzegiem” o środku $\mathbf{p}$ i promieniu r. Trójwymiarowa kula otwarta to po prostu kula bez punktów brzegowych, a kula domknięta to kula z punktami brzegowymi. Widać, że nazwy motywowane są terminologią stosowaną do przestrzeni trójwymiarowej. Mimo, że może komuś wydawać się śmiesznym nazywanie przedziału kulą„ to jednak warto zapłacić taką cenę za jednolitą terminologię stosowaną do przestrzeni różnych wymiarów, to ułatwia formułowanie twierdzeń jak i ich dowodów.

Definicja zbioru otwartego

Zbiór $\mathbf{G}$ nazywamy otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{p} \in \mathbf{G}$ istnieje liczba dodatnia r taka, że $\mathbf{B}(\mathbf{p}, r) \subset \mathbf{G}$.

Jasne jest, że cała przestrzeń jest zbiorem otwartym, w tym konkretnym przypadku można przyjąć np. $r = 2004$. Również zbiór pusty jest otwarty. Wynika to stąd, ze jeśli poprzednik implikacji jest fałszywy (czyli $\mathbf{p} \in \varnothing$), to z tej nieprawdy już wszystko wynika w szczególności istnienie liczby $r > 0$. k-wymiarowa kula otwarta jest zbiorem otwartym: jeśli $\mathbf{q} \in \mathbf{B}(\mathbf{p}, r)$ to przyjmując $\rho = r - \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$, otrzymujemy $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \rho) \subset \mathbf{B}(\mathbf{p}, r)$, bo jeśli $\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| < \rho$, to $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < \rho + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = r$. Z tego ostatniego zdania wynika, że przedział otwarty jest otwartym podzbiorem prostej, natomiast odcinek bez końców otwartym podzbiorem płaszczyzny nie jest, bo przecież żaden jego punkt nie jest środkiem dwuwymiarowej kuli, czyli koła zawartego w tym odcinku, odcinek przecież żadnego koła nie zawiera. Widzimy więc, że to czy zbiór jest otwarty, czy też nie-zależy nie tylko od samego zbioru, lecz również od tego z jakiego z jakiego punktu widzenia jest on rozpatrywany. Trójkąt otwartym podzbiorem płaszczyzny nie jest, bo żadne koło o środku w punkcie leżącym na boku trójkąta zawarte w trójkącie nie jest. Natomiast trójkąt bez boków i wierzchołków jest zbiorem otwartym, bo każdy punkt nie leżący na boku jest środkiem koła zawartego w trójkącie bez boków. Podobnie kwadrat nie jest otwartym podzbiorem płaszczyzny, ale staje się otwarty po usunięciu boków wraz z wierzchołkami. Analogiczne przykłady można rozważyć w przestrzeni trójwymiarowej i o większej liczbie wymiarów.

Podstawowe własności zbiorów otwartych

- **a.** Suma dowolnie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.
- **b.** Część wspólna skończenie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Dowód tego twierdzenia pomijamy, zainteresowanych studentów odsyłamy np.do książki z serii Matematyka dla Politechnik Stanisław Gładysz Topologia PWN. 1980. lub Kazimierz Kuratowski Wstęp do teorii mnogości i topologii wielokrotnie wznawianą przez PWN.

Definicja zbioru domkniętego w przestrzeni $\mathbf{R}^k$

Zbiór $\mathbf{F} \subset \mathbf{R}^k$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\mathbf{R}^k \setminus \mathbf{F}$ jest otwarty.

Podane przykłady zbiorów otwartych dają od razu przykłady zbiorów domkniętych: z tego, że cała przestrzeń $\mathbf{R}^k$ jest zbiorem otwartym wnioskujemy, że zbiór pusty jest domknęty. Ponieważ kula otwarta jest zbiorem otwartym, więc dopełnienie kuli otwartej jest zbiorem domkniętym. Zbiory skończone są domknięte, prosta jest podzbiorem domkniętym płaszczyzny, przestrzeni trójwymiarowej.

Zbiory domknięte mają analogiczne podstawowe własności jak zbiory otwarte.

Definicja granicy ciągu punktów przestrzeni euklidesowej

Ciąg $(\mathbf{p}_n)$ jest zbieżny do granicy $\mathbf{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy, $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| = 0$.

Widać, że definicja ta różni się od definicji ciągu liczbowego bardzo nieznacznie: w przypadku ciągu wystąpiła wartość bezwzględna różnicy wyrazu ciągu i granicy, w przypadku ciągu punktów przestrzeni mówimy o odległości wyrazu ciągu od granicy. Widać wyraźnie, że różnica obu definicji jest raczej kosmetyczna niż merytoryczna – wartość bezwzględna różnicy dwu liczb to przecież odległość między nimi, jeśli o liczbach myślimy jako o punktach prostej.

Twierdzenie charakteryzujące zbieżność ciągów w $\mathbf{R}^k$

Ciąg $(\mathbf{p}_n)$ punktów przestrzeni k-wymiarowej jest zbieżny do punktu $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} p_{i,n} = p_i$ dla $i = 1, 2, ..., k,$ tu $\mathbf{p}_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, ..., p_{k,n})$ dla $n = 1, 2, ...$ i $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_k)$.

Dowód. Dla każdego $i \in \{1, 2, ..., k\}$ zachodzi nierówność:

$$\left|p_{i,n} - p_i\right| \le \sqrt{\left|p_{1,n} - p_1\right|^2 + \left|p_{2,n} - p_2\right|^2 + ... + \left|p_{k,n} - p_k\right|^2} = \left\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\right\|,$$ z której wynika, że jeśli $\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p},$ to $\lim_{n\to\infty} p_{i,n} = p_i$ dla każdego $i \in \{1, 2, ..., k\}$. W drugą stronę twierdzenie wynika z definicji odległości: pod znakiem pierwiastka jest k składników i każdy z nich dąży do 0, co jest treścią założenia. Dowód został zakończony.

Twierdzenie to pozwala w istocie rzeczy sprowadzać badanie zbieżności ciągów punktów przestrzeni k-wymiarowej do badania zbieżności k ciągów liczbowych. Ważnym twierdzeniem było w przypadku ciągów liczbowych twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Gwarantowało ono możliwość wybierania podciągów zbieżnych z ciągów ograniczonych. Twierdzenie to pozostaje w mocy w przypadku wielowymiarowym.

Podamy teraz jedną z najważniejszych definicji tej części wykładu

Definicja zbioru zwartego

Zbiór $\mathbf{C}$ nazywamy zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu punktów zbioru $\mathbf{C}$ można wybrać podciąg zbieżny do punktu leżącego w zbiorze $\mathbf{C}$.

Interesować nas będą nie tylko zbiory, ale również funkcje, w tym głównie funkcje ciągłe. Definicja ciągowa (Heinego) ciągłości funkcji przenosi się na przypadek wielowymiarowy.

Definicja ciągowa funkcji ciągłej – przypadek wielowymiarowy

Jeśli $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}^k$ i $f: \mathbf{A} \to \mathbf{R}^l$ jest funkcją określoną na zbiorze $\mathbf{A}$, to f jest ciągła w punkcie $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy z tego, że $\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p},$ wynika, że $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{p}_n) = f(\mathbf{p}).$

Można przeformować również definicję otoczeniową Cauchy'go – ciągłości

Definicja otoczeniowa ciągłości funkcji – przypadek wielowymiarowy

Funkcja $f:\mathbf{A}\to\mathbf{R}^l$ jest ciągła w punkcie w punkcie $\mathbf{p}\in\mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje liczba $\delta>0$ taka, że $q\in\mathbf{A}$ i $\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|<\delta,$ to $\|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\|<\varepsilon.$

Ponieważ definicje te nie różnią się od podanych w przypadku jednowymiarowym, więc dowód ich równoważności pomijamy, zresztą nie różni się on od dowodu w przypadku jednowymiarowym niczym istotnym.
Dzięki twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa pozostaje też w mocy

Twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą

Jeżeli $f:\mathbf{C}\to\mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie zbioru zwartego $\mathbf{C}\subset\mathbf{R}^k$, to istnieją punkty $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{C}$ takie, że dla każdego punktu $\mathbf{x}\in\mathbf{C}$ zachodzi nierówność podwójna $f(\mathbf{p})\le f(\mathbf{x})\le f(\mathbf{q}),$ czyli $f(\mathbf{p})$ jest najmniejszą wartością funkcji f zaś $f(\mathbf{q})$-największą.

Z punktu widzenia zastosowań Analizy Matematycznej twierdzenie to ma kapitalne znaczenie. Pozwala ono stwierdzać, że np. poszukiwana przez nas największa wartość funkcji istnieje, co zwalnia nas z obowiązku przeprowadzania często kłopotliwych rozumowań w konkretnych sytuacjach. Już w przypadku funkcji jednej zmiennej były podane przykłady jego zastosowania. Teraz mieć to będzie jeszcze większe znaczenie, bo trudniej mówić o monotoniczności funkcji niż w jednowymiarowym przypadku, zresztą w przypadku odpowiednio skomplikowanych zbiorów może to być w ogóle nie wykonalne. W prostszych sytuacjach można rozpatrywać dana funkcję wielu zmiennych jako funkcję $x_1,x_2,\dots$.

Przykład

Mamy zbadać, czy funkcja określona wzorem $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ dla $(x,y)\neq(0,0)$ i 0 dla $(x,y)=(0,0)$ jest ciągła w punkcie (0,0).

Skorzystamy z definicji Heinego- ciągłości funkcji. Rozpatrujemy np. ciągi punktów w przestrzeni kartezjańskiej $\mathbf{R}^2$: $\mathbf{p}^1=(p^1{}_{1,n},p^2{}_{2,n})=(0,1/n)$ i otrzymujemy

$\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{p}^1) = \lim_{n\to\infty} \frac{0^2 \cdot 1/n}{0^4 + (1/n)^2} = 0$ oraz $\mathbf{p}^2 = (p^2{}_{1,n}, p^2{}_{2,n}) = (1/n, 1/n^2)$, dla którego $f(\mathbf{p^2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)^2 \cdot 1/n^2}{(1/n)^4 + (1/n^2)^2} = \frac{1}{2}$. Ponieważ $0 \neq \frac{1}{2}$, więc nie istnieje granica funkcji f w punkcie $(0,0)$, czyli funkcja nie jest ciągła w tym punkcie.