# Szeregi potęgowe

## Definicja szeregu potęgowego

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $x_0$ i współczynnikach $a_0, a_1, a_2, ...$ nazywamy szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Okazuje się, że funkcja wykładnicza o podstawie $e$ jest sumą szeregu potęgowego o środku w punkcie 0, podobnie funkcja sinus i kosinus, jak i inne funkcje, których rozwinięcia w szereg potęgowy wkrótce podamy. Przed tym jednak warto zapoznać się z kilkoma podstawowymi własnościami szeregów potęgowych. Oczywiście można rozpatrywać jedynie szeregi o środku w punkcie 0, bowiem podstawienie $y = x - x_0$ przekształca szereg o środku w punkcie $x_0$ na szereg w punkcie 0. W dalszym ciągu będziemy zajmować się szeregami w punkcie 0. Pierwsze pytanie jakie się nasuwa to: jak wygląda zbiór tych wszystkich punktów $x$, dla których szereg potęgowy jest zbieżny, jak tych dla których zbieżność jest bezwzględna? Odpowiedź w znacznym stopniu zależy od ciągu $(a_n)$. Rozpoczniemy od kilku przykładów.

1. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny bezwzględnie dla wszystkich liczb rzeczywistych $x$, mamy bowiem $\left|\frac{(n)!x^{n+1}}{(n+1)!x^n}\right| = \left|\frac{1}{(n+1)}x\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$.
2. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ jest zbieżny tylko dla $x = 0$. Wykażemy, że tak jest rzeczywiście. Dla $x = 0$ szereg wygląda tak: 1+0+0+0+…, więc jest zbieżny. Załóżmy teraz, że $x \neq 0$ oraz, że $n \geq 1$. Mamy $\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = |(n+1)x| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Wynika stąd, że od pewnego miejsca zachodzi nierówność $\left|(n+1)!x^{n+1}\right| > \left|n!x^n\right|$, która przeczy temu , że ciąg $(n!x^n)$ jest zbieżny do 0. Wobec tego dla $x \neq 0$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ jest rozbieżny.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $-1 \leq x < 1$, przy czym jeśli $|x| < 1$, to zbieżność jest bezwzględna. Dla $x = 0$ otrzymujemy szereg, którego wszystkie wyrazy są równe 0, więc zbieżny bezwzględnie. Dla $x = 1$ otrzymujemy znany nam już szereg harmoniczny, więc rozbieżny. Dla $x = -1$ otrzymujemy szereg $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ...$, który zgodnie z wcześniejszymi rezultatami (kryterium Leibniza), jest zbieżny warunkowo. W pozostałych przypadkach działa kryterium d'Alemberta. Z

niego wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ jest zbieżny bezwzględnie dla $|x| < 1$ oraz – rozbieżny dla $|x| > 1$: $\left| \frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n} \right| = \frac{n}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$.

4. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ jest zbieżny bezwzględnie dla $|x| \le 1 -$ wynika to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ i kryterium porównawczego. Jeśli $|x| > 1$, to wyraz szeregu nie dąży do 0, więc szereg jest rozbieżny.
5. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| < \frac{1}{2}$ - wynika to natychmiast z własności szeregu geometrycznego. Jeśli $|x| \ge \frac{1}{2}$, to wyraz szeregu nie dąży do 0, więc szereg jest w tym przypadku rozbieżny.

We wszystkich przypadkach otrzymaliśmy przedziały o środku w punkcie 0. Mogły one zawierać końce lub nie. Mogły być skończone lub nieskończone. Zdarzyło się też, że otrzymaliśmy przedział zdegenerowany do jednego punktu, do 0. Sformułujemy teraz lemat, którego natychmiastową konsekwencją będzie twierdzenie opisujące możliwe sytuacje.

**Lemat o zbieżności szeregu potęgowego**

Jeżeli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla $x = x_1$ i $|x_2| < |x_1|$, to szereg, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ jest bezwzględnie zbieżny . Co więcej, dla każdej liczby naturalnej $k$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x_2{}^n$ jest bezwzględnie zbieżny.

**Dowód.**

Ponieważ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1{}^n$ jest zbieżny, więc $\lim_{n\to\infty} a_n x_1{}^n = 0$, Zatem istnieje liczba $M > 0$ taka, że $|a_n x_1{}^n| \le M$. Mamy zatem $\sum_{n=0}^{\infty} |n^k a_n x_2{}^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_1{}^n| n^k \left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n \le M \sum_{n=0}^{\infty} n^k \left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n < \infty$. Ostatnia nierówność wynika z tego, że jeśli $0 < q < 1$, to dla każdej liczby naturalnej $k$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n^k q^n$ jest zbieżny (kryterium ilorazowe d' Alemberta), przyjmujemy $q = \left|\frac{x_2}{x_1}\right|$. Lemat został udowodniony.

Z tego lematu od razu wynika

**Twierdzenie o przedziale zbieżności szeregu potęgowego**

Zbiór punktów, w których szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , jest zbieżny jest przedziałem o środku w punkcie 0 (być może zdegenerowanym do jednego punktu lub nieskończonym). Wewnątrz przedziału zbieżności szereg jest zbieżny bezwzględnie.

**Definicja przedziału i promienia zbieżności szeregu potęgowego**

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego nazywamy zbiór tych wszystkich punktów, w których szereg potęgowy jest zbieżny. Połowę długości przedziału zbieżności nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego.

Promienie zbieżności w kolejnych przykładach to: $\infty$ w przypadku szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 0 w przypadku szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$, 1 w przypadku szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ oraz w przypadku $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $\frac{1}{2}$ w przypadku szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$. Widać z tego omówienia, że równość promieni zbieżności nie musi oznaczać równości przedziałów zbieżności.

**Twierdzenie o pochodnej szeregu potęgowego**

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ma dodatni promień zbieżności, to wewnątrz przedziału zbieżności suma tego szeregu jest funkcją różniczkowalną i zachodzi wzór

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Twierdzenia tego nie będziemy udowadniać. Zainteresowanych studentów ocenami wyższymi zapraszam na konsultacje, na których podamy dowód. Wypada jednak przestrzec, że szeregów na ogół nie wolno różniczkować w taki sposób jak się różniczkuje sumy skończone. Matematyk niemiecki Carl, Theodor, Wilhelm Weierstrass (1815-1897) wykazał, że np. funkcja zdefiniowana jako suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(7^n \pi x)$ jest ciągła na całej prostej i nie ma skończonej pochodnej w żadnym punkcie, chociaż każdy wyraz tego szeregu ma pochodną. Problemu kiedy i jakie szeregi wolno różniczkować nie będziemy omawiać, bowiem nie jest to konieczne w przypadku studentów studiów politechnicznych (inaczej niż w przypadku studentów matematyki).

Teraz zajmiemy się rozwijaniem funkcji w szeregi potęgowe.
Wiele funkcji można przedstawić w postaci sum szeregów potęgowych. Przekonamy się, że w funkcje, które są zdefiniowane „ za pomocą jednego wzoru” , można tak zapisać, co ułatwia w licznych przypadkach poznanie ich własności. Z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu

potęgowego wynika, że wewnątrz dziedziny mają one skończoną pochodną i ta pochodna jest również sumą szeregu potęgowego, więc i ona ma skończoną pochodną wewnątrz swej dziedziny. Pokażemy na przykładzie logarytmu naturalnego.

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots$ dla każdej liczby $x\in(-1,1]$. Jeśli $|x|<1$, to

$\ln(1+x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\right)'$, zatem pochodna funkcji $\ln(1+x)-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$, określonej i ciągłej i ciągłej na przedziale $(-1,1]$ i różniczkowalnej w jej punktach wewnętrznych jest równa 0. Stąd wynika, że funkcja $\ln(1+x)-\sum_{n=1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$ jest stała na przedziale domknięto- otwartym $(-1,1]$. Wobec tego dla każdej liczby $x\in(-1,1]$ zachodzi równość $\ln(1+x)-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n=\ln(1+0)-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}0^n=0.$

Przedstawiliśmy więc funkcję $\ln(1+x)$ w postaci sumy szeregu potęgowego o srodku w punkcie 0.

Otrzymany wzór zastosujemy podstawiając $x=1$ we wzorze $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n.$ Rezultat to $\ln 2=\ln(1+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ Znaleźliśmy więc sumę szeregu, którego zbieżność stwierdziliśmy już dawno. Przykład ten świadczy, że innym problemem jest wykazanie zbieżności szeregu, a innym znalezienie jego sumy. Dodajmy jeszcze, że szereg ten jest wolno zbieżny i nie warto znajdować przybliżeń dziesiętnych za jego pomocą. Można zauważyć, że

$\ln 2=-\ln\frac{1}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. W tym przypadku błąd jaki popełniamy przybliżając liczbę $\ln 2$ sumą $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest równy $\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}+\frac{1}{(k+2)2^{k+2}}+\frac{1}{(k+3)2^{k+3}}+\ldots$, więc jest mniejszy niż suma $\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}+\frac{1}{(k+1)2^{k+2}}+\frac{1}{(k+1)2^{k+3}}+\ldots=\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(k+1)2^k}.$

W przypadku szeregu anharmonicznego $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ wartość bezwzględna błędu, który popełniamy zastępując liczbę $\ln 2$ sumą $\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ jest równa

$$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}+\ldots=\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+3)(k+4)}+\ldots>$$

$$>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\frac{1}{(k+3)(k+4)}+\frac{1}{(k+4)(k+5)}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}+\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}+\ldots\right)=\frac{1}{2(k+1)}.$$

Jeśli przyjmiemy $k=4,$ to w pierwszym przypadku (proszę sprawdzić!) błąd będzie mniejszy niż $\frac{1}{80}$, a w drugim większy niż $\frac{1}{10}$. Dla $k=9$ w pierwszym przypadku błąd jest mniejszy od $\frac{1}{5120}$, a w drugim większy niż $\frac{1}{20}$. Jasne jest więc, że w razie konieczności przybliżenia liczby $\ln 2$ za pomocą ułamka dziesiętnego użyć należy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, a nie szeregu anharmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

Na tym jednym przykładzie zakończymy rozwijanie funkcji w szereg potęgowy. Funkcje takie jak: $arctg, \sin, \cos, \arcsin$ i inne rozwijamy podobnie o czym przekonamy się podczas samodzielnej pracy nad listą zadaniową z tego tematu i na konsultacjach.

Na zakończenie wykładu podamy ważne z punktu widzenia zastosowań

**Kryterium całkowe Cauchy'ego Maclaurina zbieżności szeregu**

Jeżeli funkcja $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$ jest nierosnąca, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko Wtedy, gdy zbieżna jest całka niewłaściwa $\int_1^{\infty}f(x)dx.$

**Dowód.** Konsekwencją monotoniczności funkcji $f$ jest istnienie całek $\int_1^{c}f(x)dx.$

Podobnie szereg $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ ma sumę być może nieskończoną, bo jego wyrazy są nieujemne. Ponieważ funkcja jest nierosnąca, więc nierówność $f(n)\geq\int_n^{n+1}f(x)dx\geq f(n+1)$ ma miejsce dla każdej liczby naturalnej *n*. Stąd wynika, że $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\geq\int_1^{\infty}f(x)dx\geq\sum_{n=2}^{\infty}f(n),$ a z tej nierówności wynika teza twierdzenia.

Warto podkreślić, że twierdzenie bywa użyteczne w wielu przypadkach, czasem łatwiej można stwierdzić zbieżność całki a w innych przypadkach – szeregu.

**Przykład**

Mamy zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$. Funkcja $\frac{1}{x^2+2}$ jest nierosnąca (malejąca) w przedziale $[1,\infty)$ oraz przyjmuje na tym przedziale wartości dodatnie.

Całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+2}dx=\lim_{c\to\infty}\int_1^{c}\frac{1}{x^2+2}dx=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(arctg\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_1^c=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{c\to\infty}\left(arctg\frac{c}{\sqrt{2}}-arctg\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<\infty.$$

jest zbieżna, a to oznacza, że i badany szereg jest zbieżny.