Janusz Chojnacki
Politechnika Wrocławska
Filia w Jeleniej Górze

LABORATORIUM 1

Przyspieszanie szybkości zbieżności ciągu kwadratur. Kwadratury Romberga.

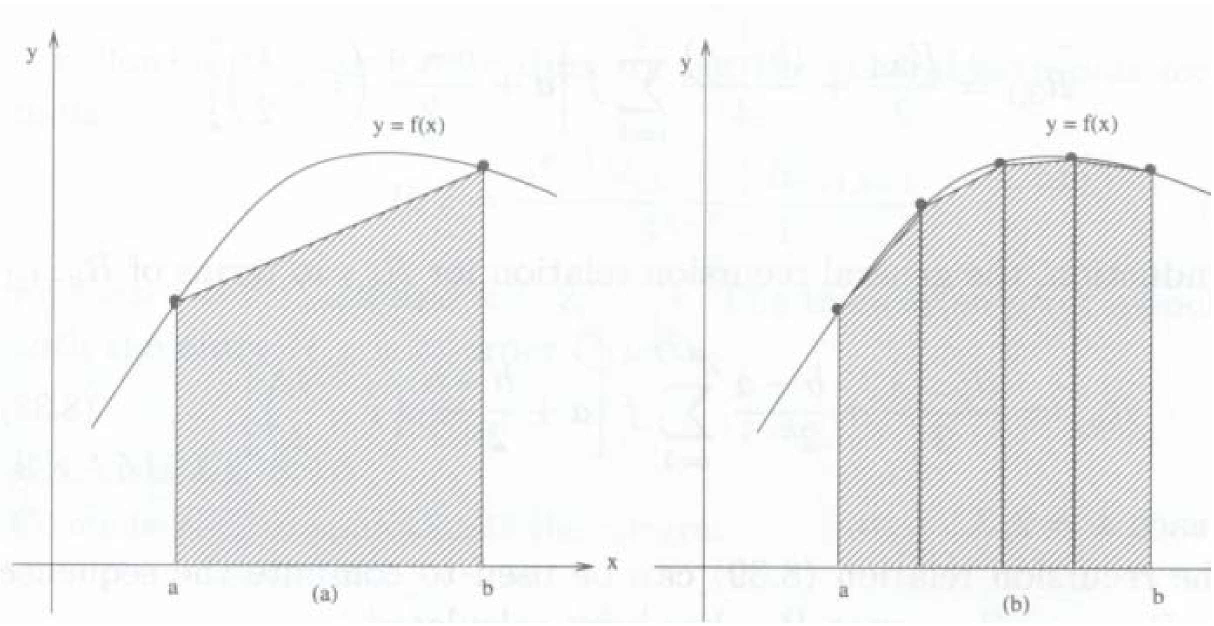
Zajmiemy się bardzo popularnymi – szybko zbieżnymi kwadraturami Romberga, które wykorzystują złożoną kwadraturę trapezów i ekstrapolacją Richardsona.

Przypomnijmy złożoną kwadraturę trapezów

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).$$

do obliczenia całki $I=\int_a^b f(x)dx$, gdzie jak pamiętamy $h=\dfrac{b-a}{n},\ x_i=a+ih,\ i=0,1,2,...,n.$

Romberg przyśpieszył zbieżność kwadratury T_n przyjmując: $n=2^{k-1}$, dla $k=1,2,...$ i długość kroku całkowania $h=\dfrac{b-a}{2^{k-1}}$.



a) $R_{1,1}=$ jest polem $2^0=1$ trapezu. b) $R_{3,1}=$ jest polem $2^2=4$ trapezów

Rozpoczynamy prezentację schematu całkowania Romberga od złożonej kwadratury trapezów, podstawiamy w niej $n = 2^{k-1}$.

$$R_{k,1} = \frac{b-a}{2^k}[f(a)+f(b)] + \frac{b-a}{2^{k-1}}\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f\left(a + \frac{b-a}{2^{k-1}}i\right),\ \text{k=1,2,...}$$

Stąd kolejno dla k = 1,2,3, mamy

$$R_{1,1} = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$ - prosta kwadratura trapezów

$$R_{2,1} = \frac{b-a}{4}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{b-a}{2} f\left(a + \frac{b-a}{2}\right),$$

$$R_{3,1} = \frac{b-a}{8}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{b-a}{4}\sum_{i=1}^{3} f\left(a + \frac{b-a}{4}i\right),$$

itd. …

Można zauważyć, że

$$R_{2,1} = \frac{R_{1,1}}{2} + f\left(a + \frac{b-a}{2}\right),$$

$$R_{3,1} = \frac{R_{2,1}}{2} + \frac{b-a}{4}\sum_{i=1}^{2} f\left[a + \frac{b-a}{2}(i - \frac{1}{2})\right],$$

…………………………………………

Ogólnie stosując zasadę indukcji

$$R_{k-1} = \frac{R_{k-1,1}}{2} + \frac{b-a}{2^{k-1}}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left[a + \frac{b-a}{2^{k-2}}\left(i - \frac{1}{2}\right)\right].\ \text{dla k=2,3...}$$

Błąd złożonej kwadratury trapezów dla 2^{n-1} przedziałów może być wyrażony za pomocą sumy:

$C(h^2) + D(h^4) + E(h^6) + ...$ gdzie $h = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$, $C, D, E, ...$ są funkcjami $f(x)$ i jej pochodnych.

Stosując tzw. ekstrapolację Richardsona np. dla kwadratur Romberga $R_{1,1}$ i $R_{2,1}$

$$\begin{aligned} I &= R_{1,1} + C(h^2) + D(h^4) + ... \\ I &= R_{2,1} + C(\frac{h^2}{4}) + D(\frac{h^4}{16}) + ... \end{aligned} \qquad (1)$$

polegającą na wyeliminowaniu składnika błędu $C(h^2)$ z układu (1), otrzymujemy $4I-3I=4R_{2,1}-R_{1,1}$ a stąd $I\approx R_{2,2}=\frac{4R_{2,1}-R_{1,1}}{3}$. Podobnie eliminując składnik błędu $D(h^4)$ otrzymujemy wzór ekstrapolacyjny na $I\approx R_{3,3}=\frac{16R_{3,2}-R_{2,2}}{15}$.

Ogólnie stosując tę samą procedurę ekstrapolacyjną, otrzymujemy ogólny wzór dla kwadratur Romberga:

$$I\approx R_{i,k}=\frac{4^{k-1}R_{i,k-1}-R_{i-1,k-1}}{4^{k-1}-1},\quad \text{dla i = 2,3,…, k = 2,3,…i.}$$

W praktyce wygodnie jest posługiwać się tzw. tablicą Romberga:

$$\begin{array}{l} R_{1,1} \\ R_{2,1}\ R_{2,2} \\ R_{3,1}\ R_{3,2}\ R_{3,3} \qquad , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n,1}\ R_{n,2}\ R_{n3}\ldots R_{n,n} \end{array}$$

której pierwszą kolumnę wypełniają kwadratury trapezów.

Funkcja w *Octave* **romberg .m** realizująca metodę Romberga numerycznego całkowania.

```
function romberg(f,a,b,n)
% Programista Janusz Chojnacki
%Funkcja romberg  oblicza całki oznaczone metodą Romberga
fprintf('\n')
disp('                    Tablica Romberga')
disp('____________________________________________________________')
disp(' i     h          Ri,1        Ri,2        Ri,3   ...  ')
disp('____________________________________________________________')
h=b-a;
R(1,1)=h*(feval(f,a)+feval(f,b))/2;
fprintf('%2.0f %8.4f %12.4f\n',1,h,R(1,1));
m=1;
for i=1:n-1
  h=h/2;
  S=0;
  for j=1:m
    x=a+h*(2*j-1);
    S=S+feval(f,x);
  end
```

```
  R(i+1,1)=R(i,1)/2+h*S;
  fprintf('%2.0f %8.4f %12.4f',i+1,h,R(i+1,1));
  m=2*m;
  for k=1:i
    R(i+1,k+1)=R(i+1,k)+(R(i+1,k)-R(i,k))/(4^k-1);
    fprintf('%12.4f',R(i+1,k+1));
  end
  fprintf('\n');
end
```